Universidade de Lisboa

Aprendizagem dos números reais: um estudo com alunos do 9.º ano

Sara Récio Pinto Barbosa

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada

Mestrado em ensino de Matemática

2013

Universidade de Lisboa

Aprendizagem dos números reais: um estudo com alunos do 9.º ano

Sara Récio Pinto Barbosa

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada orientado pelo Professor Doutor Henrique Guimarães e co-orientado pela Professora Doutora Helena Sezinando

Mestrado em ensino de Matemática

2013

Resumo

Este estudo visa compreender as dificuldades que os alunos evidenciam na aprendizagem da noção de número real. O quadro teórico usado evidencia a complexidade dos conceitos de número racional e irracional e as dificuldades que os alunos têm na aprendizagem desses conceitos: representação, distinção entre número racional e irracional e utilização deste tipo de números.

A intervenção letiva desenvolvida no 2.º período envolveu a lecionação de onze aulas de quarenta e cinco minutos do tema "Números e Operações", incidindo no estudo do tópico dos números reais, com uma turma do 9.º ano de escolaridade, de uma escola secundária, localizada na Pontinha.

A metodologia adotada segue uma abordagem qualitativa de natureza interpretativa. A recolha de dados inclui as produções escritas dos alunos, a gravação áudio das interações verbais em alguns grupos e dois testes. As discussões das aulas, as reflexões antes e pós-aulas realizadas e a escrita de um "diário de bordo" serviram também de apoio e de complemento a esta recolha.

Os resultados deste estudo mostram que os alunos recorrem muitas vezes à representação decimal finita apresentada na máquina de calcular para decidir a irracionalidade de um número. Para além disso, números representados na forma de fração com numerador e denominador inteiros são classificados, com frequência, como sendo irracionais.

Foi também visível que os alunos têm dificuldade em representar na reta real números irracionais que se apresentem na forma de raiz quadrada, mesmo depois de terem trabalhado a construção desses números usando o Teorema de Pitágoras. A análise dos resultados evidencia ainda que, na representação decimal, os alunos tendem a identificar um número irracional sob a forma de raiz quadrada com um número racional, que é uma aproximação por defeito deste.

Palavras-chave: Números reais, Representações, Comparação e ordenação, Dificuldades de aprendizagem.

Abstract

This study aims to understand learning difficulties that students show concerning real number concept. The theoretical framework underlines the complexity of rational and irrational number concepts and the difficulties that students have in terms of: representation, use and distinction between this kind of numbers.

My teaching intervention occurred in the 2nd term involves eleven classes of forty-five minutes on the theme "Numbers and Operations", topic of the “Real numbers”. It took place in a high school, located in Pontinha with a 9 grade class.

The adopted methodology is mainly based on a qualitative approach of interpretative nature. The data collected includes students’ written productions, audio recording of the dialogues in some groups and two evaluation tests. Furthermore, the classes’ discussion, my reflections before and after classes and the writing of a *logbook* complemented data collection.

Findings reveal that students often decide about the irrationality of a number using a finite decimal representation presented by a calculator. Besides, often numbers represented as a fraction of two integers are classified as being irrational. It also became clear that locating irrational numbers, which are represented by a square root in the real number line is not an easy task for students, even after the work carried out by the “construction” of these numbers using the Pythagorean Theorem. The analysis of the results shows that, in decimal representation, students have difficulty in comparing an irrational number given by its square root representation with a rational number which is an approximated value by defect.

Keywords: Real numbers, Representations, Comparison and ordering, Learning difficulties.

Agradecimentos

A realização deste relatório teve o apoio e estímulo de vários professores e amigos a quem deixo os meus sinceros agradecimentos.

Começo por agradecer ao professor orientador Henrique Guimarães o acompanhamento prestado ao longo deste ano letivo, em particular quero agradecer-lhe as suas observações de aula, sugestões, correções e críticas. Para mim, a descrição que fez dos “filmes de aula” e o dom da oralidade que tem, foram cruciais para me fazer entender que é preciso passar pela experiência, para valorizar como se deve ou não atuar na prática do ensino pedagógico e didático da matemática. Sem a sua presença, não teria percebido como certos detalhes são extremamente importantes, na atividade de um docente e podem fazer toda a diferença no percurso escolar de uma criança.

Em segundo lugar, o meu agradecimento vai para a professora co-orientadora Helena Sezinando, por ter esclarecido as minhas dúvidas sobre questões científicas, pelos seus conselhos, sugestões e pelas suas críticas pedagógicas, que me ajudaram a introduzir uma maior flexibilidade e abertura para com a turma.

À professora cooperante Catarina Ferreira agradeço as correções e sugestões relativas aos planos de aula, a sua disponibilidade e paciência, bem como o acompanhamento prestado ao longo deste ano letivo e a liberdade atribuída, para poder adaptar e tomar decisões importantes no ensino do tópico dos números reais.

Às professoras Hélia Oliveira e Joana Mata Pereira agradeço-lhes o apoio inicial dado na escrita deste relatório, o incentivo na escolha do tópico dos números reais, a vossa simpatia, os conselhos sobre a atuação didática deste tema em aula e a bibliografia cedida.

Aos meus amigos e colegas de Mestrado em Ensino agradeço a vossa amizade e a força que me deram para seguir em frente. Neste percurso letivo travei amizades não só com colegas da área de Matemática mas também de outras áreas. Fica aqui um agradecimento especial aos meus amigos Cristiana Esteves, Sónia Teixeira, José Coutinho e Teresa Verdier pelas conversas que tivemos, pela partilha e troca de ideias, pelos risos, pela confiança, pela amizade, por partilharmos a mesma paixão pelo ensino.

Quero agradecer também aos meus pais, todo o apoio que me deram durante o meu percurso académico. À minha mãe agradeço a oportunidade que me deu de estudar, por me incentivar, por acreditar em mim e por alimentar o meu sonho e a minha paixão pelo ensino da matemática.

Ao meu pai agradeço as palavras, a força genuína de um guerreiro, do grande homem que representa para mim. Agradeço igualmente o apoio nas horas difíceis, por me ajudar a lutar por aquilo que acredito e pela ajuda artística, no grafismo de alguns slides.

Por fim, fica o agradecimento a alguém que já não está entre nós, mas cujo sonho partilhado se mantém. A ti avô, que partiste para longe este ano, espero que um dia te orgulhes de mim e que estejas onde estiveres que estejas bem, que um dia possas entrar comigo numa sala e partilhar comigo o riso das crianças, a vontade e a paixão de alimentar um sonho de ensinar.

Índice

Índice de Figuras

Índice de Quadros

Índice de Anexos

Capítulo 1 – Introdução

O presente trabalho consiste no relatório da prática de ensino supervisionada, que se insere no âmbito da unidade curricular de Iniciação à Prática Profissional IV, do Mestrado em Ensino de Matemática, do Instituto de Educação e tem como tema a aprendizagem dos números reais.

> "Desde o seu aparecimento na terra, o homem tem recorrido a Matemática: calculava, contava e media, mesmo no período em que seu espírito não tinha consciência de si mesmo e quando ainda sobre tais assuntos não existiam conceitos e convenções" (Karlson, 1961, p. 3).

Neste primeiro capítulo apresento as minhas motivações e enquadro o estudo da aprendizagem dos números reais ao nível do 9.º ano, na matemática escolar. Apresento ainda o objetivo do estudo e as questões orientadoras do mesmo.

1.1 Objetivos, motivações e questões do estudo

O objectivo principal deste estudo é compreender as dificuldades que os alunos do 9.º ano evidenciam na aprendizagem da noção de número real.

O princípio da aprendizagem é um dos focos da Matemática Escolar, a qual defende que a aprendizagem de novos conhecimentos matemáticos deve ser realizada com compreensão e construída com base nos conhecimentos prévios e na experiência do próprio aluno (NCTM, 2007). Neste sentido, uma vez que os alunos já trabalharam em anos anteriores o universo numérico dos números inteiros e o dos números racionais, a minha grande motivação para este estudo é procurar compreender de que modo os alunos ao serem confrontados com a extensão desse universo, revelam a compreensão da noção de novas entidades, como é o caso dos números irracionais. Visto que esta matéria é novidade para estes alunos é para mim um desafio fazer com que a turma se sinta motivada para realizar a aprendizagem da noção de número real, com compreensão.

Vários investigadores (Behr et. al, 1992; Lamon, 2006, entre outros) na área do ensino da Matemática debruçaram-se sobre a aprendizagem dos números racionais considerando-a um tema complexo devido ao facto de estes poderem assumir diversas formas de representação, bem como a possibilidade de serem encarados com múltiplos significados. O estudo do conjunto dos números reais constitui uma extensão deste universo, podendo fazer acrescer as dificuldades dos alunos, por exemplo em tarefas que envolvam a noção de número real, a representação dos números irracionais na reta real, a identificação ou a comparação de números racionais e irracionais. Com o meu estudo, pretendo justamente compreender essas dificuldades dos alunos.

Uma vez que o tópico dos números reais ainda não foi trabalhado no âmbito do Mestrado de Ensino da Matemática, considero que este estudo é um desafio, podendo contribuir para investigações futuras. Neste sentido, tenho interesse em perceber de que forma os alunos do 9.º ano de escolaridade aprendem a noção de número real e como a utilizam em diversos contextos, revelando uma atenção especial com as tarefas de carácter exploratório e de resolução de problemas, constituindo estas desafios na construção de uma "efetiva experiência matemática" (Ponte, 2005. p. 26).

Nas tarefas de carácter exploratório, os alunos podem investigar regularidades com vista à generalização de uma regra, explorar diferentes representações dos números reais e compreender de forma significativa algumas das suas propriedades. É também importante resolver exercícios com os alunos para estimular a sua autonomia e confiança na apreensão de novos conhecimentos, permitindo a consolidação das suas aprendizagens. Com este estudo pretendo responder às seguintes questões:

i) Como procedem os alunos para distinguir números irracionais de números racionais em diversas representações e que dificuldades evidenciam?

ii) Como procedem os alunos para representar números reais na reta real e que dificuldades manifestam?

iii) Como procedem os alunos para comparar números reais em diversas representações e que dificuldades revelam?

iv) Que dificuldades os alunos revelam na representação simbólica e gráfica de intervalos de números reais e na tradução de uma representação para a outra?

Capítulo 2 – Enquadramento curricular e didático

A aprendizagem é um tema central em qualquer debate, pesquisa ou investigação sobre o ensino. Neste segundo capítulo proponho enquadrar a problemática do ensino da aprendizagem dos números reais, destacando a sua importância na matemática escolar. Posteriormente, o enquadramento é feito com base em orientações curriculares nacionais e internacionais relativas à aprendizagem do tópico dos números reais sob o ponto de vista dos conteúdos e da metodologia para a sua lecionação. Para além disso, apresento ainda alguns obstáculos epistemológicos na história dos números reais.

2.1 Números reais no currículo

Os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (2007, p.21) contêm o princípio da aprendizagem da matemática em que: “os alunos devem aprender matemática com compreensão, construindo ativamente novos conhecimentos a partir da experiência e de conhecimentos prévios”. Este princípio sublinha também, que a aprendizagem da matemática “exige compreensão e a capacidade de aplicar procedimentos, conceitos e processos” de forma flexível e apropriada ao contexto da situação. Segundo este documento a aprendizagem sem compreensão tem-se mostrado na prática do ensino da matemática um problema em diversos debates e pesquisas. Por exemplo, Bransford, Brown e Cocking (1999) in NCTM (2007, p.21) defendem que os alunos que memorizam formas e procedimentos matemáticos sem compreensão, revelam na resolução de problemas e de outras tarefas matemáticas fragilidades ao nível das suas aprendizagens. A aprendizagem com compreensão facilita a apropriação e assimilação de novos conhecimentos. As conexões entre os conhecimentos prévios e os subsequentes favorecem uma aprendizagem significativa.

A aprendizagem com compreensão é essencial para garantir a autonomia dos alunos, sendo o desenvolvimento desta autonomia, uma das dimensões consideradas nas finalidades para o ensino, no programa da matemática do ensino básico (ME, 2007). Deste modo, os alunos “aprendem mais e melhor”, quando têm o controlo das suas aprendizagens a partir dos objectivos a que se propõem e quando têm a consciência da avaliação do seu progresso. Os Princípios e Normas referem também que a escolha criteriosa das tarefas fomenta a vontade dos alunos aprenderem (NCTM, p. 22, 2007), tendo sido esta orientação seguida na elaboração da minha proposta pedagógica.

Historicamente, de acordo com o NCTM (2009, p.34), "o número tem sido a pedra angular, do currículo da matemática". Assim sendo, "desde o pré-escolar ao 12.º ano, os alunos deverão adquirir um conhecimento vasto dos números", nomeadamente: o que são, como se representam (por numerais ou na reta real), que relação têm uns com os outros, de que forma estão integrados nos sistemas numéricos, que propriedades apresentam e de que modo devem ser utilizados na resolução de problemas. Neste percurso escolar, é importante que os alunos sejam capazes de: optar relativamente ao contexto, pelo cálculo mental, pelas estimativas plausíveis ou pelo uso da calculadora; compreender, comparar e representar os números em diversos contextos e "aprender as diferenças existentes entre os sistemas numéricos", que são preservadas ou modificadas (NCTM, p.34-37, 2007).

De acordo com o Programa da Matemática do Ensino Básico, o sentido de número começa a ser desenvolvido desde o 1.º ciclo do Ensino Básico logo no 1.º ano de escolaridade, quando os alunos aprendem a contar e ordenar os números de uma forma implícita. Ainda neste ciclo acresce o trabalho com números racionais não negativos, na sua representação decimal.

Na transição para o 2.º ciclo, os alunos iniciam o estudo de simétrico de um número e de valor absoluto, com vista à aprendizagem da noção de número inteiro. Neste ciclo desenvolve-se também a representação de número racional sobre a forma de fração, mantendo-se o trabalho de cálculo com este tipo de números, na sua representação decimal.

No 3.º ciclo, os objectivos gerais de aprendizagem para os números e operações mencionados no programa ME (2007 e p. 48) indicam que os alunos devem:

- "compreender e ser capazes de usar as propriedades dos números inteiros e racionais, e desenvolver a noção de número real;
- "ser capazes de resolver problemas, raciocinar e comunicar em contextos numéricos";
- "ser capazes de estimar e calcular resultados aproximados, de apreciar ordens de grandeza e de avaliar a razoabilidade de um resultado";

- "desenvolver destrezas de cálculo numérico mental e escrito".

Para além disso, existem ainda os objetivos gerais de aprendizagem, que serviram de base ao estudo da unidade dos números reais, tais como (ME, 2007, p. 5):

- "ler e interpretar representações simbólicas e gráficas (…), e apresentar adequadamente informação em qualquer destas formas de representação";

- "traduzir informação apresentada numa forma de representação para outra, em particular", no estudo dos intervalos de números reais.

Neste ciclo, habitualmente no 7.º ano de escolaridade, os conhecimentos sobre os números inteiros são aprofundados e procede-se à comparação e ordenação dos mesmos. Neste ano estudam-se: as propriedades das operações, o m.d.c., o m.m.c, as potências de expoente inteiro positivo, a simplificação de expressões, os números primos, compostos e os critérios de divisibilidade. No 7.º ano os alunos aprendem ainda a noção de raiz quadrada.

No 3.º ciclo o estudo dos números e operações é alargado, ganhando importância quando se introduz a noção de número irracional, expandindo o universo numérico para a noção de número real. Usualmente no 9.º ano de escolaridade, os alunos aprendem a noção de número real, trabalham a representação dos números reais sob a forma de dízimas (finitas ou infinitas), estudam as propriedades da transitividade nas relações de menor que e maior que em *R*, aprendem a representar na reta real os números com valores aproximados em diversos contextos, estendem as propriedades das operações que trabalhavam em *Q* ao conjunto *R* e aprendem a representar (simbólica e graficamente) os intervalos de números reais.

Segundo o NCTM (2007) embora no 6.º ano os alunos tenham "uma primeira abordagem aos números irracionais", a partir do 9.º ano de escolaridade deve-se desenvolver os seus conhecimentos sobre os números reais. Assim, os alunos deverão "compreender que os números irracionais só podem ser aproximados por frações ou pela interrupção ou repetição de números decimais", "perceber a diferença entre números racionais e irracionais" e "alargar a compreensão sobre os números irracionais para além do π e $\sqrt{2}$" (NCTM, 2007, p. 348).

Relativamente ao trabalho na reta real no 9.º ano, os alunos deverão "compreender que dada a origem e uma unidade de medida, cada ponto de uma reta corresponde a um número real e vice-versa" (NCTM, 2007, p.348). Neste ponto, o manual Pi 9 adotado, também sugere na página 98 algumas indicações referindo que na representação da reta real é importante que os alunos tenham a perceção de que "existe uma infinidade de números irracionais em qualquer segmento de reta real", uma vez que é sempre possível enquadrar qualquer número real, num intervalo de números reais.

No que respeita à aprendizagem dos números reais, o programa valoriza a resolução de problemas, nomeadamente com vista à investigação de regularidades numéricas, e sublinha a necessidade do reforço do "sentido de número e das operações" (ME, 2007, p.48). Além disso, as tarefas devem promover "a exploração e investigação de situações numéricas, bem como exercícios destinados a consolidar aspetos rotineiros da aprendizagem dos números e operações" (ME, 2007, p.49). O cálculo numérico deve ser desenvolvido, à semelhança do já foi referido, mentalmente, por escrito e usando a calculadora. A opção quanto ao uso da calculadora deverá ser feita tendo por base o número que se pretende estimar e a sua ordem de grandeza.

Quanto às tarefas de exploração, estas devem fomentar a aprendizagem dos números reais, sendo dado aos alunos o tempo adequado para poderem formular as suas conjeturas, argumentar as suas ideias e validar os seus processos de raciocínio. No que respeita aos conceitos específicos, os alunos devem compreender que "a calculadora tem limitações" e que não permite decidir se um número é irracional (ME, 2007, p.49). Neste sentido, o programa sugere a discussão com os alunos, quanto à irracionalidade, por exemplo dos números $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$.

É também importante "discutir com os alunos as vantagens e limitações das aproximações em vários contextos". No tratamento do conjunto dos números reais, este deve ser entendido como uma extensão do universo numérico aprendido nos anos anteriores e a análise dos "intervalos, como subconjuntos de R", deve servir de base para o estudo posterior das inequações, sendo este último um tópico pertencente ao tema da Álgebra (ME, 2007, p.49).

Na Brochura da Álgebra, os autores Ponte et al. (2009, p.156) focam alguns aspectos importantes da aprendizagem dos números reais, nomeadamente as seguintes:

- "é fundamental que os alunos compreendam os intervalos como subconjuntos de *R*, representem e interpretem intervalos de números reais na forma simbólica e gráfica, bem como a sua intersecção e reunião" e

- saibam "lidar com situações em que se usa a transitividade da relação de ordem em *R*".

Estes autores e os materiais de apoio da DGIDC (ME, 2009) dão exemplos de tarefas interessantes, no que diz respeito aos conteúdos das relações de menor e maior em *R*, garantindo, que os alunos percebam a continuidade destas aprendizagens, nomeadamente quando tiverem de trabalhar inequações. Apresentam-se de seguida dois exemplos, que serviram de inspiração para uma das tarefas propostas em aula (ver Quadro IV, no Anexo1, pp. 110 - 111):

- "O que acontece quando multiplico ambos os membros da desigualdade $2 < 3$ por 4? E por –4?"

- "O que acontece quando multiplico ambos os membros da desigualdade $20 > 10$, por 2? E por –2?"

No que diz respeito às dificuldades que os alunos manifestam na aprendizagem dos números reais, a Brochura da Álgebra (Ponte et al., 2009, p.24 e p.157) aponta algumas delas, relativas ao conjunto dos números racionais. Citam-se de seguida alguns exemplos:

- "A ordenação dos números racionais traz dificuldades significativas para os alunos", pois enquanto que no conjunto dos naturais essa ordenação é intuitiva, no conjunto dos números racionais "não é fácil dizer qual é maior entre $\frac{5}{9}$ e $\frac{4}{7}$. Neste caso é de usar a representação decimal e a reta numérica".

- "Mesmo na representação decimal surgem, por vezes, dificuldades significativas nos alunos, por exemplo, ao ordenar 0,7 e 0,14. Muitos deles ignoram o significado posicional dos algarismos e dizem que 0,14 é maior que 0,7 pois 14 é maior que 7".

- Os números reais, pertencentes ao tema dos "Números e Operações", assumem uma relação estreita com o tema das inequações, pertencentes ao tema da "Álgebra". E como as dificuldades mais comuns dos alunos na resolução de inequações estão fortemente relacionadas com a compreensão e utilização das relações de ordem em *R* e com a representação e interpretação de intervalos de números reais, salientam-se por isso, algumas das dificuldades comuns dos alunos em ambos os tópicos nomeadamente: "aplicar indevidamente as regras" (…) "multiplicando ambos os membros de uma inequação por um número negativo sem inverter o sentido da desigualdade" e "estabelecer incorretamente a intersecção e reunião de conjuntos-solução em situações de conjunção e disjunção de condições".

Em Junho de 2013 foi homologado o novo programa para o ensino básico, que prevê várias modificações na lecionação da disciplina de Matemática, a partir do próximo ano letivo 2013/2014. Assim sendo, proponho fazer aqui uma breve análise às modificações feitas no âmbito da lecionação do tópico dos números reais. Uma das novidades deste novo programa é o facto de apresentar os conteúdos programáticos distribuídos por ano letivo e não por ciclo. Fazendo uma análise por ano, ao nível dos conteúdos programáticos percebe-se que a unidade do tópico dos números reais lecionada habitualmente no 9.º ano de escolaridade, de acordo com as novas metas vai passar a ser faseada por três anos de escolaridade: 7.º, 8.º e 9.º, talvez devido à dificuldade de introduzir a noção de segmento incomensurável.

De acordo com as novas metas curriculares os alunos do 7.º ano, no próximo ano letivo já vai ser ensinado aos alunos a noção de segmentos de reta incomensuráveis. Relativamente à noção de medida o novo programa ME (2013, p.20) trata: "conversões de medidas de comprimento por mudança de unidade; invariância do quociente de medidas; segmentos de reta comensuráveis e incomensuráveis e incomensurabilidade da hipotenusa com os catetos de um triângulo retângulo isósceles".

No novo programa optou-se por definir no 7.º ano apenas raízes quadradas de quadrados perfeitos e raízes cúbicas de cubos perfeitos, o quociente de quadrados perfeitos ou ainda o quociente de cubos perfeitos, possivelmente para não confundir os alunos que até este momento só conhecem os números racionais. Por outro lado, o ME (2013) introduz a noção de segmentos incomensuráveis, dando exemplos concretos de aplicação com triângulos retângulos isósceles, mostrando aos alunos que os catetos são incomensuráveis com a hipotenusa, com a utilização do Teorema Fundamental da Aritmética para provar que não existem naturais a e b tais que $a^2 = 2b^2$ (ME, 2013, p.54).

Quanto ao estudo das dízimas infinitas não periódicas, enquanto que no NCTM (2007) este era proposto no 7.º ano, no novo programa aparece pela primeira vez no 8.º ano. Pode-se também verificar que a aprendizagem da noção de número real e o trabalho dos alunos com as diferentes representações dos números reais (racionais e irracionais) como as dízimas finitas e infinitas (periódicas ou não periódicas) é introduzido de acordo com o novo programa no 8.º ano (ME, 2013, p.22). Relativamente ao tópico dos números reais, no 9.º ano de escolaridade os alunos passam a estudar apenas as propriedades das "relações de ordem" em *R*, "os intervalos" de números reais e os "valores aproximados de resultados de operações" (ME, 2013, p. 24).

2.2 Breve referência histórica aos números reais

A construção completa do sistema dos números reais demorou séculos de história. Segundo Nakamura (2008, p.17) "nenhuma verificação empírica, nenhuma medição de grandezas, por mais precisa que seja, provará que uma medida tem valor irracional. Os trabalhos desenvolvidos nas antigas civilizações do Egito, Babilônia e Grécia por estudiosos como Pitágoras (586 a.C.-500 a.C.), Euclides, Eudoxo (408 a.C.-355 a.C.), Zenão e Arquimedes (287 a.C.-212 a.C.); e dos estudos de Galileu (1564-1642), Descartes (1596-1650), Cavalieri (1598-1647), Bolzano (1781-1848), Cauchy (1789-1857), Weiersttrass (1815-1897), Cantor (1845-1918) e Dedekind (1831-1916) eliminaram progressivamente as ambiguidades relacionadas com a noção de número real.

No século XIX, Dedekind mostrou que o sistema numérico tinha a mesma propriedade da continuidade que o sistema geométrico e através da sua noção de "corte" foi construindo o conjunto dos números reais e completando a reta real. Segundo Oliveira (1980, p.90) o corte de Dedekind é um subconjunto X de Q tal que: "$i) X \neq \phi$ e $X \neq Q$; $ii) X$ é um segmento inicial de Q se para quaisquer $r, s \in Q, r < s \wedge s \in X \Rightarrow r \in X$ e $iii) X$ não tem máximo em Q".

Na análise bibliográfica, ao cruzar diferentes leituras de diversos autores (Cezar, 2011, p.22, Silva, 2011, p. 26; Penteado, 2004, p.5; Bartolomeu, 2010, p.33; Pommer, 2012, p.25) identifiquei que na história dos números reais existem dois fatores que são vistos como obstáculos epistemológicos: a existência de segmentos incomensuráveis e a densidade do conjunto dos números reais. Pessoa (2012, p.4) refere que “a escola platónica, criada depois da morte de Pitágoras, já considerava os números incomensuráveis, porém, pouco conseguiu desenvolver-se naquele período. Eudoxo, por volta do ano 370 a.c. apresentou a teoria das proporções e o método da exaustão; a partir daí, os segmentos incomensuráveis passaram a ser compreendidos e aceites geometricamente”.

Como já foi descrito, devo salientar que há uma tentativa no novo programa das metas curriculares de fazer chegar aos alunos do 7.º ano esta noção, de uma maneira gradual. A implementação das metas curriculares é muito controversa, visto que os alunos neste ano de escolaridade provavelmente vão evidenciar muitas dificuldades na aprendizagem desta nova noção. As metas prevêem que os alunos compreendam as demonstrações de grande parte do que aprendem, e deste modo, a aplicação do Teorema Fundamental da Aritmética pode constituir uma grande dificuldade, sobretudo para alunos do 7.º ano de escolaridade.

No novo programa ME (2013, p.55) é dado especial destaque às definições de segmentos incomensuráveis, apresentando-se mesmo a definição: “dois segmentos de reta são comensuráveis quando (e apenas quando), tomando um deles para unidade de comprimento, existe um número racional positivo r tal que a medida do outro é igual a r. Como exemplo destaca-se que “a hipotenusa e um cateto de um triângulo retângulo isósceles não são comensuráveis” e designam-se “segmentos de reta com esta propriedade por incomensuráveis” (ME, 2013, p.55).

No que respeita à densidade do conjunto dos números reais Garcia (2005, p.11) menciona que “os gregos negaram a existência dos números irracionais. Para eles a reta onde se marcava todos os racionais era perfeitamente contínua; admitir os irracionais era imaginá-la cheia de buracos”. O conjunto dos números reais é denso porque entre quaisquer dois números reais há infinitos números reais. A noção de densidade dos pontos de uma reta remete para uma outra característica, a de continuidade dos pontos numa reta. No livro de Introdução à Topologia (Santos, 2011, p.19) é apresentada a seguinte definição de conjunto denso: “Sejam E um espaço métrico e $A \subset E$. Diz-se que A é denso se $adA = E$”, em que adA representa a aderência do conjunto A e $adA = \operatorname{int} A \cup frA$.

Há ainda a referência à ideia que, no mundo em que vivemos, os números que usamos no quotidiano (para fazer compras, para ver as horas, entre outros) são números racionais, não tendo os números irracionais presença significativa (Cezar, 2011, p.22). Este tipo de obstáculos que influenciou séculos de história, ainda hoje interfere no processo de ensino-aprendizagem dos números reais. Neste quadro teórico, tendem a surgir dificuldades concetuais por parte dos alunos, tais como a compreensão dos segmentos incomensuráveis e a necessidade de distinguir dízimas infinitas periódicas de não periódicas.

Decorrente destas dificuldades é necessário reorganizar e reforçar o sentido de número, de modo que a que os alunos construam a sua conceção dos números irracionais e posteriormente os números reais sejam introduzidos, rompendo com a conceção única de que apenas existem os números racionais. De acordo com Cezar (2012, p.22) "é neste momento, que os obstáculos se manifestam".

2.3 Dificuldades no ensino-aprendizagem dos números reais

2.3.1 Classificação dos números: racional ou irracional?

Nas suas pesquisas Fischbein et al. (1995) e Igliori e Silva (1998), destacam que os alunos e também futuros professores costumam ter dificuldades em distinguir números racionais de irracionais, por desconhecerem noções importantes como a incomensurabilidade e a densidade (Silva, 2011, p.20). Penteado (2004, p.7) cita que Igliori e Silva (2001) referem que alguns alunos definem número irracional, como um número cuja representação decimal é infinita (contendo infinitos algarismos após a vírgula) "ou ainda as raízes", e definem número racional como aquele que é somente um "número exato ou inteiro". Para além disso, estes autores destacam que o símbolo de reticências "causa instabilidade nas respostas, mesmo se houver um número finito de casas, associando-o a um número irracional" (Penteado, 2004, p.7). Oliveira e Fiorentini (2007, p.10) mencionam numa investigação em sala de aula que os alunos por vezes esquecem-se de representar as reticências, ao citar o seguinte diálogo: "alunos: $\sqrt{2}$ dá 1,41421356. Professora: ponto, ponto, ponto... Que significa estes (...)? Se eu não faço isso eu não garanto que este número tem infinitas casas decimais e é irracional".

Segundo Fichbein (1995, p.43) "o conceito de irracional, de modo especial, é totalmente confuso na cabeça de muitos estudantes. O número irracional é equivalente a não inteiro ou a número com infinitas casas decimais, algumas vezes a números negativos". Muitos alunos não atentam para a diferença essencial entre dízimas infinitas periódicas e não periódicas. Tais confusões são produzidas pela interpretação do número irracional no seu sentido usual fora da Matemática. Na sua pesquisa, Rezende (2003, p.29) afirma que no contexto pedagógico os números irracionais são encarados como "nebulosos", "surdos", que "não dizem nada", porque para além de muitos deles não possuírem uma determinada posição na reta numérica, estes existem apenas no universo da "matemática abstrata".

Kreemer (2001, p.8) descreve numa espécie de diário, a sua visão relativa aos números reais:

> "Sobre a pergunta o que é para você o que é um número irracional? posso dizer que as dúvidas em torno da definição destes números eram imensas. A verdade era que eu não sabia quem eles eram. Então se dissessem que $\sqrt{2}$ era irracional eu acreditava. O problema é que eu passei a pensar que sempre que na representação decimal de um número com precisão de oito casas decimais não houvesse repetição, como acontecia com $\sqrt{2}$ na calculadora, ele seria irracional. Essa imagem me levava a crer que $\frac{1}{31}$ era irracional pois, quando eu realizava essa divisão na calculadora, com precisão de oito decimais, não via nenhuma casa se repetir".

A dificuldade aqui relatada não se trata somente de um caso particular, visto que no ensino básico os alunos recorrem frequentemente à autoridade de uma calculadora para decidir se um número é ou não irracional. Conforme já foi referido, no programa da matemática ME (2007), o professor deve ter a preocupação de criar tarefas em aula que levem os alunos a compreender que a calculadora é apenas uma ferramenta e que é limitada em termos de casas decimais, devendo o aluno desenvolver o seu espírito crítico para argumentar e justificar a classificação de um dado número real, como sendo racional ou irracional.

Na sua investigação Penteado (2004) concluiu que algumas das dificuldades dos alunos se prendem com a associação das dízimas infinitas ao número irracional e de um número racional como sendo somente aquele que é representado por uma dízima finita. De acordo com esta autora, vários pesquisadores como Robinet (1993), Fischbein, Jehiam e Cohen (1995); e Tirosh (1995) evidenciam que a confusão existente na classificação de números reais, bem como do desconhecimento da propriedade da densidade deste conjunto, leva a que os alunos revelem mais tarde dificuldades na aprendizagem de limites e de continuidade de funções (Penteado, 2004, p.5).

De acordo com Behr et. al. (1992) e outros pesquisadores (Romanatto (1998), Woerle (1999) e Valera (2005) cit. por Lima (2010)) a dificuldade da aprendizagem dos números racionais deve-se ao facto destes possuírem múltiplas representações e diversos significados. Deste modo, o aluno deve escolher a representação mais favorável, na transição entre representações. Quaresma (2010, p.175) indica na sua tese que, por vezes os alunos revelam dificuldade "em converter uma fração para numeral decimal, ao usar o denominador como parte decimal", dando um exemplo em que converteram $\frac{1}{4}$ para a forma de dízima, obtendo 0,4. Relativamente ao conceito de medida, nesse estudo vários alunos não compreendem como se deve medir porções inferiores à unidade. Quaresma (2010, p. 110 e p.175) refere ainda que "os numerais mistos fraccionários também trazem algumas dificuldades, já que os alunos, frequentemente, consideram a parte inteira separadamente da parte fraccionária".

2.3.2 Comparação e ordenação de números e representação de intervalos de números reais

Na representação dos números racionais na reta real, Lima (2010, p.58) destaca a dificuldade dos alunos em identificar a fração que representa a medida do comprimento de um qualquer segmento e cita Bright et al. (1988) que afirma que "a necessidade de coordenar a informação simbólica e pictórica com o modelo da reta numérica coloca dificuldades aos alunos em fazer corresponder as frações com as representações na reta numérica"[1].

Na sua monografia Kreemer (2001, p.21) cita Behr (1987, p.57) que afirma que na reta numérica, os alunos têm muita dificuldade porque não conseguem perceber que a ideia na qual o modelo da reta numérica se apoia é uma ideia de medida e "possuem uma grande dificuldade na escolha da unidade com que vão contar as partes do todo e as partes tomadas desse todo" (Kreemer, 2001, p.31).

[1] No original em inglês (minha tradução).

Quaresma (2010, p.178) sublinha que, os alunos têm dificuldade “em ordenar e comparar numerais decimais com desigual número de casas decimais e não conseguem ordenar um conjunto de números representados de diferentes formas”. Deste modo, a compreensão do sistema numérico decimal torna-se, por vezes problemático. No que respeita à ordenação de frações, a mesma autora refere que os alunos têm muita dificuldade em estabelecer conexões com os números naturais, já conhecidos em anos anteriores e que cometem o erro de ordenar por vezes as frações tendo em consideração somente os seus numeradores.

No estudo dos números irracionais, no ensino básico, quando se calcula uma raiz quadrada inexata, é apresentado ao aluno um valor aproximado. “No entanto, quando pedimos a esses alunos que localizem essas raízes quadradas inexatas na reta numérica dos números reais podemos, observar uma grande dificuldade vinda dos mesmos” (Maia, 2012, p.1). Na representação das raízes inexatas na reta real, alguns investigadores, complementam esta constatação, ao referirem que esse objetivo só pode ser atingido se de facto os alunos já souberem aplicar bem o Teorema de Pitágoras (Oliveira e Fiorentini, 2007).

Os registos de representação semiótica de Raymond Duval constituem o ponto de partida na transição de um tipo de representação para outro tipo de representação. Penteado (2004, p.34) refere que Duval desenvolveu a sua teoria cognitiva a partir da seguinte questão: “Como se processa a aprendizagem?”. Segundo Duval (1993) as representações semióticas possuem condições próprias de significado e de funcionamento. Este autor defende que para um mesmo objeto, a partir do instante em que o aluno consegue transitar de uma representação para a outra utilizando diferentes registos (da linguagem natural, numérico, algébrico, gráfico, ou geométrico) a sua aprendizagem é efetiva, sendo atribuído pelo sujeito o seu significado.

Duval (1993) destaca ainda que a compreensão de um determinado conceito produz significado na aprendizagem do aluno se houver a coordenação (tratamento e conversão) entre pelo menos dois registos diferentes de representação de um mesmo conceito. O tratamento consiste na atividade que permite transformar a representação interna de um dado registo semiótico, sem alterar suas as características iniciais. Na resolução de exercícios, o tratamento é considerado a transformação da informação dentro do mesmo registo de representação.

Por sua vez, a conversão permite transformar “a representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada num registo em uma representação desse mesmo objeto, dessa mesma situação ou da mesma informação num outro registo” (Duval, 2009, p. 58). Por outras palavras a conversão permite trabalhar a informação de um dado objeto realizando a transição entre diferentes registos de representação.

De acordo com o NCTM (2007, p. 422) “os gráficos transmitem certos tipos de informação visual, enquanto as expressões simbólicas poderão ser mais facilmente manipuladas, analisadas e transformadas”. Quaresma e Ponte (2010, p.6) por sua vez, sublinham que “geralmente, os alunos começam por resolver questões usando uma mistura de representações verbais e pictóricas, nomeadamente desenhos ou esquemas, que servem de base a estratégias que permitem a ligação entre a interpretação da informação do enunciado e a respetiva solução.”

Na sua investigação, Pereira (2012) debruçou-se sobre algumas das dificuldades dos alunos e procurou compreender os processos de raciocínio que estes utilizam na resolução de problemas que envolvem intervalos de números reais e inequações. Pereira (2012, p.109) menciona que neste tipo de problemas os alunos têm dificuldade em estabelecer conexões com propriedades trabalhadas em anos anteriores, como por exemplo, a propriedade da desigualdade triangular e que recorrem à “linguagem natural oral ou escrita e à linguagem simbólica, não apresentando dificuldades significativas nas transformações em registos de representações, sejam tratamentos ou conversões”.

Capítulo 3 – Unidade didática

Neste capítulo começo por caracterizar a turma a que se destina o presente estudo, apresento a proposta pedagógica da unidade, que inclui a planificação e as estratégias desenvolvidas e descrevo as tarefas realizadas com os alunos. No final do capítulo apresento a descrição sumária e reflexiva das aulas lecionadas.

3.1 Caracterização da turma

A minha intervenção letiva supervisionada desenvolveu-se com uma turma do 9.º ano de escolaridade, na escola Braamcamp Freire. Esta turma no início do ano letivo e ao longo do 1.º período foi constituída por 19 alunos, 9 raparigas e 10 rapazes, cujas idades estavam compreendidas entre os 13 e os 16 anos, tendo a maioria dos alunos 14 anos. No ínicio do 2.º período as duas alunas com Necessidades Educativas Especiais (uma com uma perda de audição do e a outra aluna com dislexia, escoliose, cefaleias, entre outros problemas de saúde) optaram por ir para outra escola, passando a turma a ser constituida por 17 alunos, 7 raparigas e 10 rapazes, conforme se apresenta no Quadro I. Assim sendo, parte da caracterização da turma foi por mim reformulada, tendo por base reuniões e informações recolhidas em conversa com a Diretora de turma.

Quadro I – Variação das idades dos alunos da turma

Idades	N.º de alunos
13	5
14	9
15	2
16	1

O núcleo do grupo de 14 alunos da turma tem-se mantido, desde o 7.º ano. Dois alunos integraram a turma no ano letivo anterior e este ano entraram mais três alunos, um que veio de outra escola e os outros dois repetentes. Apenas um aluno não é português, é guiniense, mas compreende bem a língua portuguesa. Os novos alunos foram aparentemente bem acolhidos pela turma, mantendo-se coesa e com gosto pelo trabalho colaborativo em grupo. Em geral, a turma tem apresentado um bom comportamento e um aproveitamento com grandes assimetrias, isto é, com alunos muito bons, autónomos, responsáveis, interessados e alunos com muitas dificuldades e a precisarem de muito apoio por parte dos professores.

A turma apresentou em geral, no final do 1.º período um bom aproveitamento à disciplina de Matemática, conforme se ilustra na figura 1, havendo apenas quatro alunos com nível negativo. No segundo período, o número de níveis negativos aumentou para sete. A professora que acompanha esta turma apontou como possivel justificação para este aumento o acumular da matéria dada e o facto dos alunos terem ido a uma visita de estudo a Paris no meio do 2.º período, fazendo com que perdessem o seu ritmo habitual de trabalho.

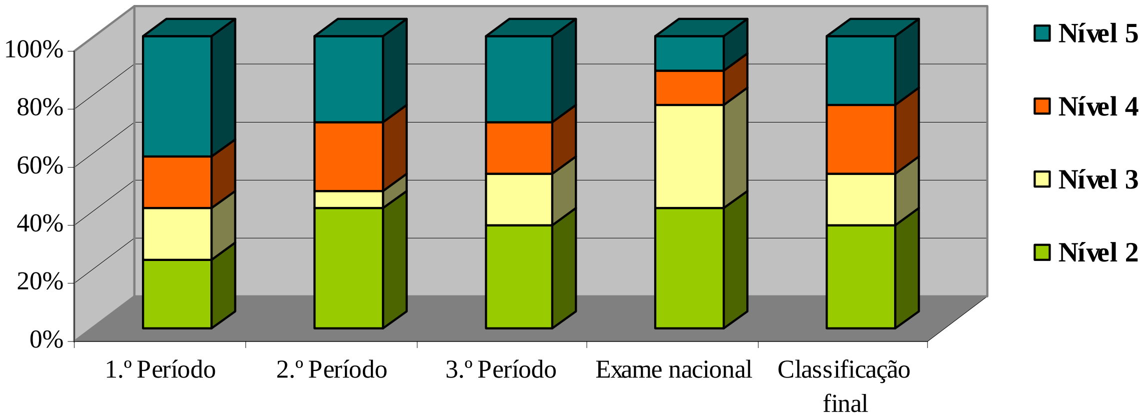


Figura 1 – Níveis de desempenho em matemática dos alunos da turma

Todos os alunos moram próximo da escola, à exeção de uma aluna que mora, fora do concelho de Odivelas, na Amadora. A maioria dos alunos (13) têm como Encarregado de Educação a mãe, uma minoria (3) o pai e uma aluna o padrasto. Oito alunos da turma têm problemas de saúde, sendo de destacar um aluno que por ter diabetes, pode ter de sair durante as aulas para ingerir alimentos.

Apenas 6 alunos têm reprovações, tendo dois deles duas reprovações. Cerca de metade da turma (11) pretende seguir para o ensino superior. Há ainda que salientar o caso de um aluno da turma que tem revelado um total desinteresse em todas as disciplinas e que foi suspenso no 2.º período por mau comportamento no bar da escola. Este aluno, por iniciativa própria, deixou de frequentar as aulas de matemática no 3.º período, embora continuasse a vir à escola e a conviver com os seus amigos nos intervalos.

Existem outros dois alunos que, devido ao seu comportamento na sala de aula e desinteresse pela disciplina, se têm revelado casos preocupantes de insucesso escolar. Contudo, nas aulas por mim lecionadas, estes dois alunos mostraram-se participativos e até entusiasmados com a matéria dada. Refira-se que nos testes que se realizaram posteriormente, um desses alunos deixou as perguntas todas em branco e tentou apenas resolver algumas das questões relacionadas com o tópico dos números reais.

No final do 2.º período, cinco alunos encontravam-se em risco de retenção. Quanto ao 3.º período, a generalidade da turma foi-se muito abaixo no que respeita a classificações, nos testes realizados. Neste último período (à exceção do aluno desistente) houve cinco alunos com nível negativo a matemática, três alunos com nível 3, três alunos com nível 4 e cinco alunos com nível 5. Nas classificações dos Exames Nacionais (na figura 1) dos 14 alunos que fizeram o exame, 9 baixaram as classificações face às classificações atribuídas no 3.º período. À exceção do aluno desistente que ficou retido por faltas, reprovaram nesta turma apenas dois alunos.

3.2 Planificação da unidade de ensino

3.2.1 Conteúdos e objetivos

O presente estudo enquadra-se no tópico dos Números Reais, trabalhado com alunos do 9.º ano de escolaridade, que se insere na unidade dos números reais e inequações, fazendo parte do vasto tema dos "Números e Operações". Neste tópico é trabalhada terminologia, conceitos e noções específicas: números irracionais, conjunto dos números reais, representação decimal sobre a forma de dízima finita ou infinita, relação de ordem $<$ e $>$ em *R*, representação e ordenação de números na reta real, valores aproximados por excesso e por defeito, representação de conjuntos de números reais (simbólica ou graficamente), interseção e reunião de intervalos. Posteriormente às aulas por mim lecionadas tive a oportunidade de acompanhar de perto o trabalho dos alunos, relativos à continuação do estudo dos valores aproximados, dos enquadramentos e das propriedades das operações em *R*, as quais ficaram ao cargo da professora cooperante.

No que respeita à lecionação deste tópico tive em conta a seguinte hierarquia de conteúdos: 1. Noção de número irracional e de número real, 2. Noção de dízima infinita, 3. Raciocínio e Comunicação (oral e escrita), 4. Relações de ordem em *R* e 5. Representações (gráfica e simbólica) de intervalos de números reais. Embora as operações com números reais não tenham sido por mim lecionadas, estas constituem o 6.º e último nível da hierarquia apresentada.

A unidade dos números reais foi lecionada ao longo de onze aulas sequenciais, entre os dias 19 de Fevereiro e 11 de Março de 2013. Esta intervenção teve uma interrupção de duas aulas consecutivas, nos dias 27 de Fevereiro e 4 de Março, destinadas à revisão geral da matéria dada e à realização de uma ficha de avaliação, respetivamente. A planificação da unidade de ensino, apresentada no Quadro II, contém os tópicos matemáticos, a calendarização das aulas e os objetivos de aprendizagem (específicos e gerais), de acordo com o ME (2007, p. 50). O estudo das operações com números reais e os enquadramentos ficaram a cargo da professora da turma, tendo sido lecionados nos dias 12 e 13 de Março.

Quadro II – Planificação sinóptica da unidade dos números reais

<table>
<tr><th rowspan="2">Conteúdos</th><th rowspan="2">Calendarização (n.º de aulas de 45 min.)</th><th colspan="2">Objetivos de aprendizagem (ME, 2007, p. 50)</th></tr>
<tr><th>Específicos</th><th>Gerais</th></tr>
<tr><td>• Noção de número real</td><td>19 e 20 de Fev. (3 aulas)</td><td>• Identificar um número real (racional e irracional) como um número cuja representação decimal é uma dízima finita ou infinita.</td><td rowspan="4">• Desenvolver a noção de número real.

• Ler e interpretar representações simbólicas e gráficas.

• Traduzir informação apresentada numa forma de representação para outra, em particular.

• Resolver problemas, raciocinar e comunicar em contextos numéricos.</td></tr>
<tr><td>• Reta real

• Relações de < e > em R</td><td>25 e 26 de Fev. (3 aulas)</td><td>• Representar números reais na reta real, com aproximações apropriadas aos contextos.
• Comparar e ordenar números reais.
• Compreender e utilizar a transitividade das relações < e > em R.</td></tr>
<tr><td>• Intervalos de números reais</td><td>5, 6 e 11de Março (4 aulas)</td><td>• Representar e interpretar intervalos de números reais, bem como a sua intersecção e reunião, simbólica e graficamente.</td></tr>
<tr><td>• Valores aproximados</td><td>11 de Março (1 aula)</td><td>• Determinar valores aproximados por excesso e por defeito.</td></tr>
</table>

A planificação da unidade didática constitui uma tarefa importante para o professor que a vai lecionar, uma vez que esta permite sequenciar diversas tarefas, e estabelecer um fio condutor das aprendizagens dos alunos, tendo em conta os objectivos específicos do programa e as orientações curriculares. No Anexo 2 (pp.112-137), encontram-se as planificações realizadas aula a aula, que utilizei ao longo da lecionação desta unidade, bem como os enunciados de todas as tarefas propostas e outros instrumentos de trabalho importantes, para o desenvolvimento deste estudo.

O tema dos "Números e Operações" é transversal a todos os ciclos do ensino básico, constituindo um dos grandes temas da aprendizagem da disciplina de matemática. Este tema assume igualmente uma relação estreita com o tema da Álgebra, uma vez que os números e as operações são fundamentais para o desenvolvimento dos processos de raciocínio e do pensamento algébrico dos alunos. No 3.º ciclo a aprendizagem dos números reais serve de preparação para a introdução do tópico das inequações.

Dada a importância da aprendizagem correta das noções que envolvem os números reais, procurei na minha prática letiva apoiar o raciocínio dos alunos e conduzi-los, sem lhes "dar o caminho a seguir ou a resposta a seguir", esperando que fossem capazes de desenvolver estratégias de resolução adequadas e formulassem conjecturas na resolução de alguns problemas (Stein & Smith, 1998).

3.2.2 Estratégias de ensino

Nas aulas que serviram de base para este estudo foi dada uma atenção especial ao método de ensino exploratório, onde os alunos tiveram de desenvolver um trabalho autónomo, com vista à descoberta de propriedades ou da generalização de regras importantes que envolviam características dos próprios números reais. Na minha actividade de docente procurei transmitir alguns conhecimentos, deixando a parte mais importante "da descoberta para os próprios alunos" adoptando a metodologia referida por Ponte (2005). Canavarro (2011) concorda com Ponte (2005) ao referir que a resolução autónoma de tarefas exploratórias e as discussões feitas com o grupo-turma, fomentam nos alunos a construção do seu próprio conhecimento matemático.

Na resolução de problemas, procurei que os alunos se sentissem desafiados, sendo capazes de "construir novos conhecimentos", de "aplicar e adaptar" diversas estratégias e "analisar e refletir sobre os seus processos de resolução", de acordo com o estabelecido pelo NCTM (2007, p.466). No que respeita à resolução de exercícios, com este tipo de tarefa, pretendi fazer com que os alunos consolidassem os seus conhecimentos, particularmente nos seguintes conteúdos: classificação de números reais, comparação de números reais e representação de intervalos em diversas representações. Tarefas de consolidação deste tipo foram também utilizadas em trabalhos de casa.

O trabalho autónomo dos alunos foi realizado, sempre em grupos, de 2 a 4 alunos. Esta opção pelo trabalho em pares ou em grupo teve como grande objetivo a partilha e troca de ideias matemáticas, mas também o apoio e inter-ajuda que se cria nesses grupos, afim de equilibrar eventuais assimetrias entre os alunos da turma. O trabalho a pares tendencialmente os alunos recorrem ao seu par para esclarecer dúvidas pontuais, enquanto que, no trabalho em grupos superiores a dois alunos, o debate e a troca de ideias tende a surgir com mais frequência. Esta opção de organização do trabalho em aula favorece o desenvolvimento do raciocínio, da comunicação e da capacidade dos alunos para resolverem problemas. A opção da realização de tarefas em grupo visa ainda promover a autonomia dos alunos.

Habitualmente as aulas foram estruturadas em quatro momentos: apresentação, realização do trabalho autónomo dos alunos, discussão de algumas das tarefas propostas, sistematização de conhecimentos e clarificação de algumas ideias ou noções. Sintetizadamente apresenta-se a descrição desses momentos:

- **Apresentação –** Nesta fase apresenta-se a tarefa e certifico-me que todos os alunos entenderam o que é pedido no enunciado.

- **Trabalho autónomo –** Os grupos realizam trabalho autonomamente e discutem as suas ideias matemáticas. Enquanto isso, procuro esclarecer algumas dúvidas pontuais e acompanhar o trabalho que está a ser desenvolvido. É pedido aos alunos nesta fase que registem as suas descobertas e ou aprendizagens.

- **Discussão –** Neste momento os grupos apresentam o modo como resolveram as tarefas, com vista ao debate, partilha e troca de ideias com o grupo-turma e as necessárias correções. Este momento permite ainda aos alunos refletir e discutir o seu próprio trabalho, atribuindo significado à sua aprendizagem.

- **Sistematização** – Este momento serve para clarificar algumas ideias e fazer uma sistematização das principais aprendizagens dos alunos.

No decorrer do trabalho autónomo dos alunos ou nos momentos de discussão tive a preocupação de colocar questões semelhantes às que são sugeridas pelo NCTM (2007, p.61) e ME (2007, p.30): "Porque é que pensas que isto é verdade? Alguém aqui acha que a resposta é diferente, e porquê? Porque será que isto acontece? O que acontece se…?". O objetivo destas questões prende-se com a criação de hábitos de argumentação e apresentação de justificações por parte dos alunos, afim de estimular e desenvolver neles a comunicação oral, o pensamento e o raciocínio matemático.

Nesta turma, os alunos já estão muito habituados ao trabalho a pares e em grupo, manifestando sempre um gosto especial quando têm o apoio dos colegas na resolução de tarefas matemáticas e por isso considero que foi uma mais valia para a sua aprendizagem esta partilha e troca de ideias. Para além das estratégias relativas à natureza das tarefas propostas e da opção do trabalho em grupo ou pares, existem outras que estão relacionadas com a opção metodológica do trabalho seguida pelo próprio docente.

Em diversas aulas recorri ao uso da digitalização da resolução de vários alunos, para salientar a possibilidade de diversas estratégias para um mesmo problema e servi-me ocasionalmente da digitalização de um aluno em particular, para proceder à correção de uma tarefa específica, fazendo com que os restantes colegas confrontassem a sua resolução e procedessem à correção dos seus erros no lugar. No momento da lecionação o *feedback* dado aos alunos em algumas resoluções foi também importante para salientar algumas incoerências.

No que diz respeito aos erros cometidos procurei que fossem sempre os próprios alunos a corrigir o que estava mal, a lápis. Nas primeiras aulas, a solicitação do trabalho feito a caneta não foi muito bem compreendida pelos alunos, que estão habituados a resolver tudo a lápis, inclusivamente os testes. No entanto, mantive esta opção, porque é importante que alguns dos seus registos não sejam apagados, para melhor compreender os seus pensamentos e dificuldades.

3.2.3 Tarefas

O processo de seleção das tarefas teve por base os objetivos do estudo e também as características da turma a que se destinam, uma vez que a maioria dos alunos são interessados e aplicados, gostam muito de trabalhar em grupo e de trocar ideias sobre os desafios que lhes são propostos. No entanto, existem alguns alunos na turma, que por necessitar de um maior apoio para começar a trabalhar efetivamente nas tarefas, revelam mais dificuldades em desenvolver o seu raciocínio e em acompanhar o ritmo de trabalho de outros colegas. Devo salientar que, neste processo a colaboração da professora cooperante foi preponderante para efetuar uma escolha adequada e adaptada aos alunos da turma.

Na lecionação desta unidade didática, foram trabalhadas tarefas diversificadas, sendo estas de três tipos: exploratórias, problemas e exercícios. Apresento de seguida alguns exemplos:

- **Tarefas de exploração**, como é o caso da representação de números racionais sobre a forma de fração e de dízima com vista à generalização de uma regra (tarefa *"Sequência de Figuras"*, Anexo 3, p.139)

- **Exercícios,** por exemplo, que envolvem a classificação (ou distinção) de números reais, como sendo racionais ou irracionais, em diversas representações (Exercícios 4, 5 e 8 da pág. 97 do manual, Anexo 3, p.140)

- **Resolução de problemas** em diversos contextos, nomeadamente sobre: intervalos de números reais (tarefa *"Perímetro dos triângulos"*, Anexo 3, p.145), a representação dos números na reta real (questão 2.2 da tarefa "Reta real" relativa à marcação de $\sqrt{5}$, Anexo 3, p.142) e a identificação dos segmentos da figura em espiral, cuja medida é um número irracional (tarefa *"Espiral"*, Anexo 3, p.142).

No Quadro IV (ver Anexo 1, pp. 111-112), apresenta-se a planificação geral de todas as tarefas realizadas em aula, relativas à unidade lecionada dos números reais. Para além de explicar as tarefas já aqui referidas, este quadro constituiu o ponto de partida de todo o trabalho efetuado, e é muito importante pois sintetiza e descreve em pormenor os propósitos matemáticos envolvidos nas experiências realizadas em aula, com os alunos. As tarefas escolhidas tiveram por base os materiais da DGIDC e o próprio manual Pi9, adotado pela escola.

i) A tarefa “Sequência de Figuras”

Esta primeira tarefa (Anexo 3, p.139) tem como principal objetivo rever a noção de número racional, como um número cuja representação decimal é uma dízima finita ou infinita periódica.

As questões 1.1, 1.2 e 1.3 são classificadas como exercícios, por terem uma natureza fechada. Estas primeiras questões permitem trabalhar diversas formas de representação de um número racional, em dízima e em fração, servindo como apoio intuitivo aos processos de generalização pretendidos para a resolução das alíneas seguintes.

As questões 1.4 e 1.5 assumem uma natureza exploratória, pois promovem a exploração e investigação de regularidades, com vista à generalização de uma regra que permita representar qualquer dízima infinita periódica na forma de fração. Esta tarefa permite aos alunos desenvolver o seu raciocínio, uma vez que se pretende que descubram um processo que os permita chegar à generalização.

ii) Tarefas de Classificação dos números reais

A tarefa “Descoberta de um novo conjunto” (Anexo 3, p. 140) permite introduzir a noção de número irracional, como um número cuja representação decimal é uma dízima infinita não periódica. Esta tarefa pretende fazer com que os alunos sejam capazes de desenvolver a noção de número real, a partir da distinção entre números racionais e números irracionais.

Na questão 1.1, os alunos podem recorrer à máquina de calcular, no entanto nos casos em que os números apresentados não são raízes quadradas de quadrados perfeitos os alunos poderão apenas suspeitar que esses números são irracionais, por ainda não terem explorado suficientemente o caso em que raízes de quadrados perfeitos são sempre números racionais. Na questão 1.2 pretende-se que os alunos explorem diferentes números, chegando à conclusão que a raiz quadrada de qualquer quadrado perfeito é sempre um número racional. Sucede que, para além destes números, as raízes quadradas do quociente entre números que sejam quadrados perfeitos são também números racionais. A partir da realização desta tarefa, os alunos já poderão afirmar que um número representado sob a forma de um radical é irracional, depois de compreenderem que as raízes inexatas são dízimas infinitas não periódicas.

Os Exercícios 4, 5 e 8 da página 97 do manual, propostos na questão 2 da ficha de trabalho sobre números reais (Anexo 3, p.140) têm o intuito de consolidar a noção de número real, por meio da identificação dos números racionais e irracionais. No Exercício 4, para além da identificação destes números, pretende-se que os alunos revisitem as noções de número natural, inteiro e racional, identificando os números que pertencem a cada um dos respetivos conjuntos, utilizando a simbologia adequada, com vista a obter afirmações verdadeiras.

Com a tarefa "Dízima" (Anexo 3, p.141) pretende-se levar os alunos a compreender que a máquina de calcular não permite decidir a irracionalidade de um número, dada a sua limitação de casas decimais. Para além disso, os alunos deverão perceber que a calculadora pode induzir em erro a classificação de uma determinada dízima infinita, como sendo periódica ou não periódica. Esta tarefa é proposta para trabalho de casa, para que os alunos tenham o tempo necessário para a explorar devidamente.

iii) Tarefas de Representação na reta real

A tarefa "Espiral" (Anexo 3, p.142) tem o intuito de servir de base para a representação posterior dos números na reta real. A exploração da medição de diferentes segmentos de reta em torno de uma espiral, sugere aos alunos que consolidem a sua aprendizagem sobre a classificação dos valores de medida como sendo números racionais ou irracionais e que trabalhem o Teorema de Pitágoras, para o cálculo da medida da hipotenusa. A aplicação deste teorema é feita mantendo constante um dos catetos do triângulo retângulo igual a uma unidade e o comprimento do outro cateto igual à raiz quadrada já determinada recursivamente, na construção do triângulo anterior.

Na tarefa "Reta real" (Anexo 3, pp. 142-143) os alunos devem procurar estabelecer conexões com a tarefa anterior para representar os números irracionais solicitados, considerando a origem das construções geométricas dos triângulos retângulos sempre o ponto zero da reta numérica e a altura igual à unidade. Esta tarefa permite também explorar a representação de números racionais na reta real e trabalhar as relações de ordem em R, por meio da comparação e ordenação dos números.

iv) Tarefas de Comparação, Ordenação e de Valores aproximados de números reais

A tarefa "Comparação de números reais" (Anexo 3, p.142) pretende fazer com que os alunos consolidem as suas aprendizagens sobre a comparação de números racionais, em diferentes representações (decimal e fracionária) e que também desenvolvam uma nova aprendizagem na comparação de números irracionais com qualquer tipo de número real.

Pretende-se que ao resolverem a tarefa "Desigualdades" (Anexo 3, p.142) os alunos sejam capazes de estabelecer algumas conexões com a tarefa anterior, visto que ao trabalharem as relações de ordem em *R*, devem compreender que quando se multiplica ou divide ambos os membros de uma desigualdade por um número negativo real, o sentido da desigualdade inverte-se, e quando se multiplica, divide, adiciona ou subtrai ambos os membros de uma desigualdade por um número real, o seu sentido mantém-se. Esta tarefa permite igualmente trabalhar a transitividade das relações de ordem em *R*. Por sua vez, a realização dos exercícios 2.2 e 2.3, da pág. 104 do manual permitem reforçar esta aprendizagem.

A tarefa "π" (Anexo 3, p. 145) da pág.100 do manual foi adaptada, com a extensão de três alíneas, permitindo aos alunos estabelecer conexões entre a comparação e ordenação dos números reais apresentados com o estudo dos seus valores aproximados. A história associada à tarefa é apelativa, fazendo vários alunos interessarem-se por ela. Esta tarefa permite ainda descobrir a melhor e a pior aproximação para π, estimar valores aproximados (por excesso e por defeito) e apreciar ordens de grandeza.

v) Tarefas de Intervalos de números reais

Os exercícios 1.1, 1.2, 1.5 e 1.6 da pág.108 do manual (Anexo 3, p. 144), permitem interpretar e representar sob diferentes formas os intervalos de números reais, explorando a representação gráfica e simbólica. Esta tarefa possibilita também a apropriação de diferentes tipos de representação, a realização de conexões (coordenação) entre eles e o desenvolvimento da capacidade dos alunos para efetuar transformações entre diferentes registos de representação (simbólica e graficamente). Algumas das transformações (conversões) entre as diferentes representações não são imediatas, e por isso é expectável que alguns alunos evidenciem dificuldades.

A tarefa “Perímetro dos triângulos” (Anexo 3, p.145) tem um caráter problemático, porque o aluno tem de elaborar uma estratégia para a conseguir resolver, a qual não ocorre da aplicação imediata de conhecimentos prévios. A justificação dos processos utilizados neste problema é fundamental para desenvolver o raciocínio matemático dos alunos e fazer com que estes construam o seu conhecimento dos intervalos, atribuindo significado à sua aprendizagem. Na justificação da resolução desta tarefa espera-se que os alunos recorram a procedimentos algébricos. Ao resolverem esta tarefa os alunos levantaram a hipótese de um dos lados do triângulo poder medir uma unidade e depois testaram as suas conjeturas.

No que respeita à interseção e reunião de intervalos, os exercícios 1 e 11, das páginas 112 e 113 do manual (Anexo 3, p.144) permitem trabalhar a sua representação gráfica e simbólica. Estas tarefas do estudo da representação de intervalos de números reais, tem em vista o aprofundamento desta aprendizagem e põe em jogo o relacionamento de diversas representações de um mesmo objeto matemático.

3.3 Avaliação

Durante as aulas segui um tipo de avaliação formativa e reguladora, procurando perceber o modo como os alunos estavam a pensar, por meio de observação direta, de questionamentos: individuais, a pequenos grupos ou com grupo-turma. Deste modo, à medida que foi decorrendo lecionação da unidade, acompanhei os alunos e recolhi informação sobre o seu desempenho, no sentido de perceber onde estavam a ter mais dificuldades. Os questionamentos feitos em aula permitiram-me direcionar, aprofundar e aferir as aprendizagens dos alunos. Estes questionamentos e a observação que ia fazendo durante o trabalho autónomo dos alunos na realização de tarefas permitiram também ajustar continuadamente a minha prática de ensino, tendo em vista a sua melhoria.

Perrenoud (1999) defende que a avaliação formativa ao ser desenvolvida pela regulação tratasse de um processo deliberado e intencional, que tem como objetivo, o controlo dos processos de aprendizagem, que permite consolidar, regular, auto-regular, desenvolver e redireccionar as aprendizagens dos alunos. Larrosa (1999) citado por Oliveira e Fiorentini (2007, p.11) faz uma analogia interessante deste tipo de experiência formativa a uma viagem ao dizer que: “pode acontecer qualquer coisa, e na qual não se sabe onde se vai chegar, nem mesmo se vai chegar a algum lugar. A experiência formativa seria, então, o que acontece numa viagem e que tem a suficiente força como para que alguém se volte para si mesmo, para que a viagem seja uma viagem interior” (p.11). De acordo com este autor, no processo de formação, o mais importante não é o que se aprende, mas sim a relação interior que o aluno estabelece com a matéria de estudo.

Para além da avaliação feita tendo por base os questionamentos aos alunos e as observações de aula, realizaram-se dois testes com matéria relativa aos números reais. Um dos testes realizou-se perto do fim da lecionação (no dia 4 de Março) e o outro realizou-se cerca de dois meses após a minha intervenção (no dia 13 de Maio). As questões relativas aos números reais cobriram essencialmente: a marcação de números reais na reta real, a comparação de números reais, a distinção entre números racionais e números irracionais, a interseção de conjuntos e as representações geométricas e na forma de intervalo. O tipo de questões enunciadas nos testes e os resultados obtidos pelos alunos nas respetivas questões podem ser consultadas nos Quadros V e VI (Anexos 4 e 5, pp.147-149). Estes quadros indicam ainda as respostas dos alunos às questões dos testes. No quadro V (Anexo 4, p.149-150) destaco também as principais dificuldades dos alunos, numa questão específica de um teste.

Os resultados dos testes de avaliação mostram que os alunos erraram mais nas questões relativas à comparação de números reais e na distinção entre números racionais e irracionais. Na questão da marcação de números reais na reta real, que saiu no teste do dia 4 de Março, não houve respostas erradas e apenas 3 alunos deixaram essa questão em branco. No entanto há alunos (6) que continuam a ter dificuldades em proceder à marcação exata de números irracionais, que se apresentem sob a forma de raiz quadrada, apesar de terem frequentado diversas aulas de apoio, em que esse assunto foi tratado.

Dois meses após a lecionação do tópico dos números reais, os resultados do teste surpreenderam-me negativamente em certos alunos. Alunos deram como exemplos de números irracionais, números representados na forma de fração com numerador e denominador inteiros ou ainda números representados por dízimas finitas. Depois de corrigir o teste em conjunto com a professora cooperante, procurei compreender junto dos alunos, que até tinham tido um bom desempenho em todas as tarefas realizadas nas aulas, o porquê de terem errado em determinadas questões. Nos questionamentos que fiz as respostas foram nalguns casos surpreendentes, como veremos no capítulo seguinte.

3.4 Descrição sumária das aulas

19 de Fevereiro de 2013 – Terça-feira – 45min

A primeira aula iniciou-se com normalidade, uma vez que os alunos já esperavam que fosse eu a dar a aula e já sabiam porque razão iria utilizar gravadores, no decorrer das aulas seguintes, destinadas à lecionação do tópico dos números reais. O objetivo desta aula foi rever a noção de número racional e explorar os seus diferentes tipos de representação, com vista à generalização de uma regra que permitisse representar na forma de fração qualquer dízima infinita periódica.

Ao questionar os alunos sobre se tinham tido dúvidas no trabalho de casa, a maioria respondeu que não e que até tinham achado fácil. Um dos alunos passou a distribuir a ficha de trabalho (Anexo 3, p.139) pelos grupos, que começaram de imediato a resolvê-la. Ao fim de 10 minutos, após terem iniciado a ficha de trabalho, solicitei a um aluno que fosse ao quadro resolver as três primeiras alíneas. Embora durante a aula, as questões 1.1 e 1.2 não tenham suscitado quaisquer dúvidas, alguns alunos nas suas produções escritas utilizaram incorretamente os parêntesis abrangendo desnecessariamente vários algarismos a seguir à vírgula, na representação do período da dízima.

O aluno que corrigiu a primeira alínea representou as dízimas infinitas periódicas com o uso de reticências. Aproveitei esse momento para informar o grupo-turma que também podiam recorrer ao uso de parêntesis, para representar o período da dízima. Na questão 1.2, relativamente à primeira sequência de figuras (grupo A) verifiquei que os alunos responderam $\frac{21}{36}$. Resolvi chamá-los a atenção para outra possibilidade, usando aquilo que já tinham feito na questão 1.1. Os alunos perceberam então que, se considerassem a unidade os 9 quadrados e não 36, o resultado seria diferente e igual a $\frac{21}{9}$. Esta questão suscitou uma grande discussão entre os grupos. O aluno Rui que discordava inicialmente dos seus colegas por considerar o todo os 9 quadrados, acabou por chegar a um consenso, de que afinal seriam os 36. A discussão culminou com a seguinte questão levantada pelo grupo da Íris: *"Professora afinal a nossa resolução está certa ou errada?"*. Deixei a questão em aberto, aconselhando os alunos a manterem a sua resposta no grupo A (ou B) e optei por esclarecer na aula seguinte que ambas as resoluções estavam corretas, dependendo da unidade considerada na relação parte-todo, se os 36 (ou 27) ou os 9 quadrados.

Nesta aula, os alunos tiveram níveis de desempenho muito díspares. Dos seis grupos de trabalho, três foram muito lentos e não conseguiram as questões 1.4 e 1.5. Nos três restantes grupos, os alunos ficaram entusiasmados por descobrir a regra pretendida na questão 1.5. Apercebi-me durante a aula que houve resoluções interessantes, pelo que solicitei que cada um destes grupos escolhesse um representante para na aula seguinte ir ao quadro participar na discussão. Nove alunos conseguiram chegar à generalização da regra, embora algumas das suas respostas estivessem incompletas.

Um dos grupos que não estava a perceber o que se pretendia na questão 1.5 solicitou a minha intervenção. Procurei auxiliar o pensamento dos alunos, sem dar a resposta ou o caminho a seguir. Com a minha ajuda, por meio de alguns questionamentos e de forma praticamente autónoma, o grupo conseguiu dar uma resposta completa, passando da linguagem simbólica para a linguagem natural a seguinte conclusão: *"para colocar uma dízima infinita periódica na forma de fração tem de se colocar o valor do período no local do numerador, e no local do denominador, tem de se colocar o número de noves correspondente ao número de dígitos do período."* Cinco minutos antes da aula terminar, apresentei o trabalho de casa, solicitando a um aluno que recolhesse as produções escritas dos colegas e informei que na aula seguinte iríamos continuar a discussão e a correção das questões 1.4 e 1.5.

20 de Fevereiro de 2013 – Quarta-feira – 90min

De uma maneira geral, esta aula correu bem, uma vez que os alunos responderam de forma positiva ao que lhes foi sendo solicitado, terminaram mais cedo e inclusivamente começaram a resolver tarefas de trabalho de casa (tarefa "Dízima"), tenho cumprido os objetivos do plano de aula. No entanto, considero que existem alguns aspetos que podiam ser melhorados, passando a indicá-los adiante. Alguns alunos mostraram ter pensamentos e raciocínios interessantes relativamente à aprendizagem da noção de número irracional. O principal objetivo desta segunda aula foi fazer a transição do estudo dos números racionais para os irracionais, no sentido de desenvolver a noção de número irracional, com vista a chegar ao conjunto dos números reais como sendo a reunião de dois grandes conjuntos disjuntos, racionais e irracionais. Nesta aula contei com o acompanhamento do professor orientador junto do grupo do Rui.

A entrada na sala de aula decorreu da forma habitual. Dei início às lições n.º 90 e 91 com a projeção do sumário e fiz a verificação do trabalho de casa. Os alunos não evidenciaram ter dúvidas, pelo que passei a esclarecer a questão que o grupo da Íris colocou na aula anterior, de que ambas as resoluções estavam corretas, dependendo da unidade que tinham considerado. Posteriormente, solicitei aos alunos representantes de três grupos que viessem ao quadro, para mostrar aos colegas como tinham pensado.

A apresentação das três resoluções, à questão 1.5 projetada no quadro, fez-se partindo da resposta mais incompleta para a mais completa. Deste modo, comecei por solicitar à aluna Clara que fosse ao quadro explicar para a turma como o grupo tinha pensado nas questões 1.4 e 1.5. A aluna referiu na sua resposta que pelas experiências que tinham feito nas alíneas 1.3 e 1.4 observaram que o número de algarismos do numerador e do denominador eram os mesmos e concluíram que "*a regra difere com a quantidade de algarismos do numerador*", salientando que tinha alguma dificuldade em explicar a mesma. De seguida, o David veio ao quadro, ler a resposta do grupo que dizia "*o mesmo número de noves tem de ser o mesmo número de algarismos do numerador*". Embora a resposta deste segundo grupo se aproximasse mais da generalização pretendida, faltava introduzir o termo período nessa explicação. Perguntei ao segundo grupo se não achavam que estaria a faltar algo na sua resposta e responderam-me que não. Chamei nesse momento a atenção do grupo-turma para que observassem a sequência das respostas. Finalmente, o grupo representado pelo Rui explicou para a turma como tinham pensado, lendo em voz alta para os colegas a resposta à questão 1.5 projetada no quadro (ver regra na descrição sumária da aula anterior). Como a letra do aluno era pouco perceptível, podia ter optado por transcrever a mesma, em vez de a digitalizar.

Posteriormente solicitei ao grupo-turma que colocasse na forma de fração as dízimas infinitas periódicas 1,4444... e 7,(135). Procurei dar o tempo necessário (cerca de 5 minutos) para que os grupos resolvessem de forma autónoma este novo desafio. Neste momento tive de gerir as participações dos alunos (idas ao quadro), uma vez que após observação direta, surgiram respostas inesperadas, pois houve grupos que revelaram ter estratégias interessantes e diversificadas, sendo estas as seguintes: por meio de tentativa-erro, pela escrita de uma equação (a qual não estava prevista) e finalmente pela decomposição do número, numa parte inteira e numa parte decimal (a esperada). Procedi então ao confronto das três estratégias encontradas.

Solicitei à aluna Íris que fosse ao quadro explicar a primeira estratégia, a qual referiu que encontrou o número $13/9$ por meio de tentativas. O aluno Rodrigo foi ao quadro explicar a segunda estratégia por meio da escrita da seguinte equação $1{,}444... = x/9 \Leftrightarrow x = 1{,}(4) \times 9 \Leftrightarrow x = 13$ tendo-me deixado surpreendida, porque para além de não esperar esta resolução, o valor encontrado para o numerador 13 é aproximado. Por fim, o aluno Custódio foi ao quadro apresentar a última estratégia previsível, optando por decompor o número da seguinte forma $1{,}444... = 9/9 + 0{,}444... = 9/9 + 4/9 = 13/9$.

A estratégia de tentativa-erro não acarreta grandes dificuldades. Já a estratégia da equação era mais problemática, porque a equação nem sempre permite resolver este tipo de problema, visto que o valor obtido na calculadora é aproximado. Relativamente a este aspeto, alertei o grupo-turma que, devido ao facto do número ser uma dízima infinita, não estavam a utilizar a informação toda, por faltarem algarismos e que por isso a máquina de calcular os poderia induzir em erro. Procurei também perceber junto do grupo do aluno Rodrigo como tinham pensado. O aluno referiu que introduziu na máquina de calcular 1,44444… multiplicou por 9 e concluiu que x dava 13. Validou a sua resposta, fazendo depois o inverso, em que dividiu 13 por 9 e obteve a dízima infinita periódica pretendida.

Para representar a dízima 7,(135) na forma de fração, foi uma aluna ao quadro, representante do grupo do Hugo, resolver esta questão. Escreveu $7{,}(135) = 7 + 0{,}(135) = 7 + 135/999$ faltando-lhe completar a sua resposta com a fração de $7128/999$. Ainda, nesta tarefa acrescento que no seu enunciado devia ler-se “representa na forma de fração” em vez de “representa sobre a forma de fração” os seguintes números.

Às 08h52, os alunos iniciaram a resolução da ficha de trabalho dos números reais (Anexo 3, p.140) seguindo-se aproximadamente a gestão dos tempos prevista na planificação. Informei a turma que teria cerca de 15 minutos para resolver a tarefa. Devido a ausência do seu colega de grupo, um dos alunos optou nesta aula por trabalhar sozinho, embora lhe tenha dado a oportunidade de se juntar a outros grupos. Ao fim de 15 minutos, a aluna Júlia leu em voz alta para a turma as definições de número racional e de irracional. Aproveitei para esclarecer o grupo-turma sobre o que é uma razão, uma vez que vários alunos manifestaram não perceber este conceito. Iniciei também uma espécie de discussão com o grupo-turma, no sentido de procurar clarificar a noção de número racional e irracional, dando alguns exemplos.

Posteriormente, o aluno Hugo foi ao quadro corrigir a alínea 3.1. Ao questioná-lo sobre *"o que são números racionais"* o aluno respondeu que *"são os números inteiros"*. Optei por não o corrigir de imediato, pensando que se referia somente ao primeiro exemplo. Após a análise das suas produções escritas constatei que efetivamente o aluno à semelhança de outros tende a associar aos números racionais somente os inteiros, esquecendo-se das dízimas finitas e das dízimas infinitas periódicas. Note-se que, esta é uma das dificuldades que vários investigadores também apontam nas suas teses, como se referiu no capítulo 2. Para além desta dificuldade, ao questionar o Hugo se "*o* $\sqrt{490} = 22{,}13594362$ *termina no 2?*" responde-me claramente que "*sim*" sendo enganado pelo resultado obtido no visor máquina de calcular. Embora tenha classificado corretamente o número como sendo irracional, fiquei com a seguinte dúvida: *"será que o aluno ao visualizar este número na máquina de calcular, por não ser um número inteiro o classifica como sendo irracional?"*. Pois, uma vez que o aluno acreditou que o número representado pela dízima terminava no algarismo 2, seria lógico tê-lo classificado como um número racional. Relativamente ao número $\sqrt{0{,}49} = 0{,}7$ o aluno classifica-o de irracional, levando-me a crer que não compreendeu que este número corresponde a uma dízima finita (ou que pode ser visto como o quociente entre dois números inteiros, por exemplo $7/10$) sendo por isso racional. À medida que o aluno ia resolvendo, fui questionando o grupo-turma se estavam de acordo com a resolução do colega, até que a Clara retificou que 0,7 não estava bem classificado, porque é uma dízima finita, e que por isso é um número racional.

A mesma aluna ofereceu-se para ir ao quadro continuar a correção. Resolveu a questão 3.2, tendo apresentado como exemplos de números racionais cuja raiz eram também um número racional, o 9, o 36, o 16, o 4 e o 100. Após ter questionado o grupo-turma sobre que tipo de números se tratava, os alunos responderam que eram os quadrados perfeitos. Note-se que, o facto da maioria dos alunos ter ficado agarrado aos quadrados perfeitos pode ser um indicador de resistência à aceitação de outras possibilidades, pois a noção de número racional também não é fácil. Houve no entanto alguns alunos, como por exemplo o Mário que indicaram exemplos de frações, em que o numerador e o denominador são quadrados perfeitos.

No momento de discussão com o grupo-turma surgiu uma questão interessante por parte de um aluno, que após compreender que a máquina de calcular não permite decidir a irracionalidade de um número me interrogou, *"Professora, então não há nenhum número que possa ser verdadeiramente irracional?"*. Respondi-lhe que existem números como $\sqrt{2}$ e π que se podem provar que são números irracionais.

Os últimos 25 minutos de aula foram dedicados ao trabalho autónomo dos alunos, na resolução dos exercícios 8, 5 e 4 (Anexo 3, p.140). Em termos de opções didáticas, alguns dos enunciados dos exercícios apresentados no manual estariam melhor formulados se se procedesse às seguintes correções: no exercício 5, onde se lê "qual dos números do conjunto A corresponde a uma dízima" devia ler-se "qual dos números do conjunto A pode ser representado por uma dízima" e no exercício 4 deveria acrescentar-se que se pretende completar corretamente os espaços "de modo a obter afirmações verdadeiras".

Na minha perspetiva houve nesta aula várias aproximações formais à aprendizagem da noção de número irracional, no entanto é um pouco arriscado afirmar com certeza que os alunos aprenderam esta noção de um modo significativo, uma vez que esta é uma noção complicada. Nesta aula tive a oportunidade de fazer questionamentos a dois grupos de trabalho que me explicaram como é que procederam à classificação das dízimas apresentadas, nos exercícios 4 e 8. No final da aula alertei os alunos para o facto de existir uma disjunção entre o conjunto dos números racionais e irracionais. No entanto, como considero importante criar um apoio intuitivo para perceberem que existe uma disjunção clara entre os conjuntos, na próxima aula farei uma sistematização dos conjuntos (tendo por base a sua representação diagramática), com vista a clarificar estas novas noções, que devem ser construídas e interiorizadas aos poucos pelos alunos.

25 de Fevereiro de 2013 – Segunda-feira – 90min

Esta aula teve como principal objetivo fazer com que os alunos fossem capazes de representar números reais (racionais e irracionais) na reta real, o que todos conseguiram na questão 2.1, e na questão 2.2 apenas um grupo chegou ao fim. Esta aula correu bem, na medida que os alunos foram bastante participativos tanto na tarefa “Espiral” como na questão 2.1 da tarefa “Reta real” (Anexo 3, p.142). Relativamente ao plano de aula, este foi cumprido no seu essencial, seguindo a estrutura prevista.

A entrada na sala de aula foi mais agitada do que habitual. Ditei o sumário das lições n.º 92 e 93, afim de captar a atenção dos alunos. Posteriormente foi feita a verificação do trabalho de casa e questionei a turma para a existência de dúvidas, ao que me responderam que não tiveram, e que até tinham achado fácil. Retomei a clarificação de algumas noções teóricas abordadas na aula anterior, com base na projeção do esquema diagramático da pág. 95 do manual. Referi passo a passo, a construção dos conjuntos dos naturais (como sendo o conjunto mais pequeno que os alunos conhecem), chamando a atenção para o facto do zero não pertencer aos naturais, seguido dos inteiros (acrescentando aos naturais, o zero e os inteiros negativos), racionais (dízimas finitas e infinitas periódicas, podendo estes ser representados na forma de fração entre dois números inteiros), irracionais (outro conjunto de números, correspondendo às dízimas infinitas não periódicas) e finalmente os reais (como sendo todos os números, isto é a união do conjunto dos racionais e irracionais). Houve também a necessidade de esclarecer a turma que o termo “dízima” corresponde a um número representado na sua forma decimal, visto que alguns alunos são sabiam o seu significado.

Durante a explicação surgiu uma dúvida interessante por parte do Mário que não percebia qual era a diferença entre a simbologia correspondente a “*estar contido*” e de “*pertence*”, pelo que passei a explicar que estar contido se usa para conjuntos, por exemplo o conjunto dos naturais está contido no conjunto dos inteiros e o que símbolo de pertence se utiliza por exemplo, para um elemento que pertença a um dado conjunto. Projetei posteriormente um esquema da página 94 do manual, que considera os números racionais como sendo de três tipos: os inteiros, as dízimas finitas e as dízimas infinitas periódicas. Neste momento, alertei os alunos que o esquema não estava totalmente correto, aproveitando para referir que em rigor os números inteiros são um caso particular das dízimas finitas e que, todo o número racional pode ser representado por uma dízima finita ou infinita periódica. Achei necessário fazer este alerta, pois considero que os docentes devem estar sensibilizados corrigir algumas incoerências científicas, que possam aparecer nos manuais.

Ao fim de 14 minutos, a discussão da tarefa “Dízima” iniciou-se e as opiniões acerca da racionalidade ou irracionalidade do número apresentado curiosamente divergiram. O grupo da Júlia argumentou que o número era irracional dizendo passo a citar *“eu acho que não há nenhum algarismo que se repita e por isso penso que é uma dízima infinita não periódica”*. Por outro lado, o grupo do Rui referiu que tinha descoberto o período da dízima, dizendo com entusiasmo *“o número repete-se a partir da 7.ª linha, no fim”*. Solicitei ao aluno que fosse então ao quadro indicá-lo. Neste momento, as alunas ficaram admiradas, pois embora o número estivesse representado na forma de fração com numerador e denominador inteiros, foram enganadas pela representação dos algarismos da dízima infinita apresentada.

Às 10h22 procedeu-se à formação dos grupos, tendo iniciado a resolução da ficha de trabalho sobre a reta real (Anexo 3, p.142). Informei-os que teriam cerca de 10 minutos para resolver a primeira tarefa “Espiral” (Anexo 3, p.142). Durante este primeiro momento de trabalho autónomo o Gaspar referiu-se à medida da hipotenusa do primeiro triangulo retângulo, de um modo curioso, dizendo, passo a citar “$\sqrt{2}$ *é um número todo deficiente*”. De facto a forma como os alunos se referem a números irracionais é interessante pois utilizam palavras para os definir como por exemplo número *“estranho, deficiente, esquisito”*, entre outros. Durante este momento procurei observar o trabalho dos grupos interferindo o mínimo possível e tirei algumas dúvidas pontuais ao grupo do Hugo, visto que os alunos não sabiam como começar, necessitando de uma orientação. Neste sentido disse-lhes para observarem melhor os triângulos retângulos da figura da espiral e os alunos compreenderam que teriam de utilizar o teorema de Pitágoras para determinarem a medida dos segmentos da espiral.

Ao fim de 13 minutos, após o iniciarem a tarefa iniciou-se a resolução no quadro e solicitei a colaboração do grupo-turma, para que me dissesse o modo como tinham pensado para proceder à classificação de cada um dos números reais, justificando a sua resposta. Em geral, todos os alunos responderam corretamente, no entanto houve uma aluna, que referiu que achava que $\sqrt{6}$ era racional. Nesse momento, vários colegas interpolaram-na, dizendo que não era, que era irracional porque era uma dízima infinita não periódica. O Gaspar completou a resposta dos colegas, referindo também que este número não era um quadrado perfeito e que por isso não podia ser racional, mas sim irracional.

No momento seguinte, apresentei ao grupo-turma diversos exemplos de marcação de números na reta real (em particular, de alguns números racionais e do irracional $\sqrt{2}$) e salientei a frase do manual da pág. 98 que afirma que “numa reta real, a cada ponto corresponde um número real e a cada número real corresponde um ponto da reta”, questionando-os se compreendiam o que esta frase queria dizer, ao que o Mário referiu com facilidade que “*sim, na reta se escolhermos um ponto ao calhas ele vai sempre representar um número, se escolhermos um número ao calhas ele vai sempre representar um ponto na reta*”, levando-me a crer que o aluno percebeu esta relação, conforme se preconiza no Programa do Ministério de Educação (2007).

Relativamente à marcação do número irracional $\sqrt{2}$ chamei a atenção do grupo-turma para a posição do triângulo, devendo este ser construído com vista a facilitar o transporte da medida do comprimento da hipotenusa para a reta real, a partir da origem. Às 10h50 iniciou-se a resolução da questão 2.1, em que solicitei a colaboração pontual de vários alunos, que foram explicando como procederiam para identificar na forma de dízima cada um dos pontos assinalados na reta.

Nos últimos 25 minutos de aula, os alunos continuaram a resolver a ficha de trabalho, em particular a questão 2.2. Durante o momento de trabalho autónomo dos grupos, sem os interromper, solicitei a um voluntário que fosse ao quadro proceder à localização dos números $\frac{1}{3}$ e $\sqrt{5}$ na reta real. Mesmo depois desta localização ter sido feita no quadro, alguns alunos continuaram a dificuldades em assinalar na reta real ambos os números. Uma vez que as dúvidas eram gerais resolvi esclarecer para toda a turma o modo como deveriam proceder para assinalar $\frac{1}{3}$ e $\sqrt{5}$. A marcação do número racional foi relativamente simples de compreender, já a marcação do $\sqrt{5}$ levantou maiores dificuldades. Cinco minutos antes da aula terminar marquei o trabalho de casa e solicitei a um aluno que recolhesse as produções escritas dos colegas.

26 de Fevereiro de 2013 – Terça-feira – 45min

O objetivo principal para esta aula era que os alunos desenvolvessem a sua capacidade para ordenar e comparar números reais e que soubessem utilizar a transitividade das relações de ordem de menor que e maior que em *R*. De um modo geral, embora os alunos tenham correspondido ao que lhes foi solicitado, esta aula não correu tão bem quanto as anteriores, uma vez que houve diversos aspetos, que poderiam ter sido melhorados, constituindo estes parte de uma reflexão pós-aula. Nesta aula contei com a presença da professora co-orientadora e com o acompanhamento do professor orientador junto do grupo da Júlia.

Relativamente ao plano de aula, este sofreu uma decisão pré-aula (da ida do aluno Gaspar ao quadro) que veio alterar a gestão dos tempos, inicialmente previstos. No início da aula estava previsto no plano questionar os alunos sobre se havia dúvidas no trabalho de casa, mas como a turma iria ter teste de outra disciplina em breve, tomei a opção em conjunto com a professora cooperante de retirar o trabalho de casa, sendo por isso adiado o seu esclarecimento. Comecei por esclarecer os alunos sobre a marcação do número irracional $\sqrt{5}$, visto que vários deles revelaram esta dificuldade na aula anterior, mesmo depois de um dos alunos ter ido ao quadro fazer essa mesma marcação. Neste esclarecimento usei a palavra "*análogo*", e de imediato um aluno perguntou "*Professora, o que é análogo?*", esclareci-o que era semelhante. Considero que é importante os professores estarem sensibilizados para as dúvidas dos alunos pois por vezes por um aluno que questiona, pode haver vários que também não perceberam.

Posteriormente solicitei ao Gaspar que fosse ao quadro proceder à ordenação dos números relativos à questão 2.2 (Anexo 3, p. 142). Quanto a esta opção, por um lado acho que foi positivo os colegas terem interpolado o aluno dizendo *"então estás-te a esquecer do sinal de menos na raiz quadrada de 1 sobre 16"e "o 25 sobre 16 é negativo"*. Nesta última afirmação podia ter chamado a atenção que 25 sobre 16 não é um número negativo mas sim $-\frac{25}{16}$, corrigindo esta imprecisão. Recordo que, na aula anterior poucos alunos conseguiram chegar à ordenação dos números na questão 2.2, porque não tinham marcado todos eles. A intenção desta intervenção no quadro não foi o de corrigir esta tarefa mas sim de fazer com que os restantes alunos, que não tinham procedido à marcação, soubessem como fazer a ordenação dos números. Nesse momento, apesar de ter dito e ter deixado bem claro que a ordenação do Gaspar estava errada no quadro, devia ter apagado ou riscado a mesma, servindo esta experiência para ter em atenção no futuro de nunca deixar registos errados no quadro.

Ao fim de 18 minutos após o começo da aula, os alunos iniciaram o momento de trabalho autónomo, continuando a resolução da ficha de trabalho da aula anterior (Anexo 3, p.142). No que respeita à 3.ª tarefa tive a oportunidade de circular pelos grupos e houve dúvidas, na comparação de alguns números reais. Reparei que um dos grupos escreveu que $\sqrt{2}$ era igual a 1,4142. Nesse momento coloquei várias questões ao grupo, no sentido de procurar perceber como estavam a pensar e os alunos referiram então que os números eram iguais porque ao inserirem o radical $\sqrt{2}$ na máquina de calcular, os primeiros algarismos da dízima apresentada no visor eram iguais às da dízima 1,4142. Chamei a atenção dos alunos do grupo do Hugo que deviam comparar as casas decimais de ambos os números e depois desta observação o grupo corrigiu a resposta, concluindo corretamente que $\sqrt{2}$ era maior que 1,4142.

Na resolução da 4.ª tarefa "Desigualdades" (Anexo 3, p. 142), os alunos manifestaram ter dúvidas essencialmente ao nível da interpretação do enunciado, pois não sabiam o que se pretendia. Nesta tarefa sugeri a alguns grupos que começassem por experimentar vários valores, positivos e negativos para a e b. Antes de ter iniciado a 4.ª tarefa devia ter explicado à turma o que se pretendia com a frase "*averigua o que acontece ao sentido da desigualdade*", esclarecendo que o seu significado consistia em saber se o sinal de menor (<) se mantinha ou se se invertia, passando a ser maior (>). Constatei após ouvir as gravações áudio que a grande dificuldade dos alunos não foi a de atribuir valores a a e a b, conforme se previa no plano, mas sim a de não compreender o que era o "*sentido da desigualdade*".

Durante o momento de correção desta tarefa feita pelo Rui, que solicitei por volta das 10h40, embora me tivesse apercebido que faltava qualquer coisa na sua resposta, não mencionei a palavra sentido e devia tê-lo dito. Para colmatar esta lacuna procedi à correção, acrescentando em todas as resoluções dos alunos a palavra "sentido", e explicando por escrito que as palavras "sentido da desigualdade" e "desigualdade" tem conotações diferentes. Nesse momento considero positivo ter questionado o grupo-turma se todos tinham considerado apenas números positivos, ao que um dos grupos respondeu que não, que também tinham experimentado para valores de a e b negativos. Esta perceção de que a regra é válida para quaisquer valores é importante, para poder generalizar. A generalização desta regra feita pelos alunos baseou-se assim na sua maioria em casos particulares, de a e b positivos, seguindo um tipo de raciocínio indutivo.

Reparei que em alguns grupos, os alunos experimentaram também outros valores de a e b, alternando o seu sinal.

Na alínea 4.2 o Rui referiu que "*a é menor que $\sqrt{2}$, visto que a menor que $\sqrt{2}$ e $\sqrt{2}$ é menor que 3*", respondendo corretamente mas faltando justificar. A justificação correta seria "*porque a relação de ordem goza da propriedade transitiva*". O que pretendia efetivamente nesta alínea era uma explicação do modo como os alunos pensaram e não uma justificação. Não posso deixar de salientar a intervenção do Rodrigo que disse para a turma que "*como $\sqrt{2}$ o é valor intermédio entre a e 3 então a tem de ser menor que 3*". Esta resposta revela compreensão no sentido que o aluno, embora não explicite a propriedade transitiva, refere a relação de ordem e explicita a transitividade entre os números. Deste modo, considero que o enunciado deveria ter sido corrigido, passando a ler-se "*explica a tua resposta*" em vez de "*justifica a tua resposta*".

Esta aula foi sem dúvida um fator de aprendizagem que certamente servirá para tirar partido em termos de explorações didáticas, para o meu futuro, enquanto docente. No que se refere a questões pedagógicas, a minha relação com os alunos deverá ser melhorada, no sentido de criar uma maior abertura, de procurar escutar os alunos, ouvir e integrar o que eles dizem, bem como de procurar ter uma maior atenção em relação ao que está a acontecer. Percebi na reunião de discussão pós-aula que o pedir "*silêncio*" aos alunos nem sempre é bom, pois este criou uma barreira entre mim e a turma. Neste sentido, nas aulas seguintes procurarei fazer um esforço para ter uma maior flexibilidade, e ir construindo essa minha relação com a turma. Este tipo de experiência serviu não só para perceber que há certas coisas que na prática não funcionam, mas também que os erros constituem sem dúvida uma grande aprendizagem. Nesta aula estive particularmente centrada e muito preocupada com aquilo que tinha para fazer, e deixei-me invadir pouco por aquilo que estava a acontecer.

5 de Março de 2013 – Terça-feira – 45min

A entrada dos alunos na sala de aula foi mais rápida que o habitual. Ao fim de 5 minutos ditei e projetei o sumário. Ao contrário das aulas anteriores que tiveram sobretudo um carácter exploratório, esta aula foi mais expositiva, com a introdução de algumas noções teóricas sobre intervalos de números reais, tendo nela decorrido diversos momentos de discussão, em que procurei investir mais na comunicação com a turma. O plano de aula foi cumprido de acordo com o previsto e notou-se que os alunos estiveram particularmente entusiasmados por aprender uma matéria nova, com a qual se sentiram mais à vontade.

Comecei por lançar para a turma a seguinte questão *"Dados dois números reais, por exemplo o 2 e o 3, quantos números reais acham que existem entre eles?"* alguns alunos responderam de imediato infinitos, mas outros duvidavam desta resposta. Mantive a questão em suspenso, não validando de imediato a resposta, e procurando outras opiniões. Um aluno que estava convicto da sua resposta justificou-a dizendo: "*existe o 2,9999…*", fazendo assim uma associação imediata aos números representados por dízimas infinitas. Já os alunos Custódio, Paula e Clara ofereceram alguma resistência a esta resposta afirmando que "*tem início e fim, portanto não pode ser infinito*". Os alunos foram dando vários exemplos de números situados entre 2 e 3, chegando à conclusão que podiam dividir uma unidade em tantas partes quanto quisessem, isto é num número infinito de segmentos. Ainda assim, uma aluna que não estava convencida disse; *"não é infinitos, porque a reta acaba"*. Questionei-a: "*então e as dízimas infinitas?*" e a mesma aluna reagiu dizendo: *"há pois é, nunca acaba, então são infinitos!"* dando-me a entender que compreendeu que, apesar do intervalo ser limitado, existem infinitos números reais entre os seus extremos. Posteriormente procedi, com a colaboração do grupo-turma, à representação dos conjuntos de números reais apresentados, partindo da representação gráfica, passando para a forma de intervalo e por último para a escrita de uma condição, na representação em compreensão.

Prossegui com a apresentação de todos os casos possíveis de intervalos limitados e ilimitados e introduzi a noção de infinito, discutindo com os alunos o seu significado. No caso dos intervalos ilimitados, senti a necessidade de esclarecer o grupo-turma de que o infinito não é um número, mas sim uma forma de representação. Fiquei admirada pelo facto de alguns alunos evidenciarem que já sabia como se representava o infinito, dizendo-me que "*é um 8 deitado*". Na discussão do que é o infinito, os alunos mostraram ter ideias interessantes dizendo: *"é ilimitado"*, *"nunca acaba"*, *"é um número desconhecido"*e *"é o número maior que existe"*. Nesta discussão, o grupo-turma evidenciou compreender de modo intuitivo a complexa noção de infinito, percebendo que escolhendo um número tão grande quanto quisessem seria sempre possível adicionar-lhe consecutivamente uma unidade e que escolhendo um número tão pequeno quanto se queira, seria sempre possível subtrair-lhe uma unidade, chegando assim à representação de mais infinito e de menos infinito, respetivamente.

Nesta primeira parte da aula, que demorou cerca de 25 minutos, como aspetos positivos destaco os seguintes: a minha mnemónica "de agarrar uma bola" que ajudou os alunos a perceber mais facilmente que o parêntesis voltado para dentro incluía os extremos do intervalo; ter esclarecido a dúvida do aluno Gaspar escrevendo no quadro que os símbolos $\wedge$ e $\vee$, significavam "e" e "ou" respetivamente (visto vez que os alunos confundem frequentemente o seu significado) e de ter tido a preocupação de fazer uma letra maior no quadro, em virtude de uma aluna ter dificuldade em ler, servindo esta como contributo para a minha prática futura, para ter uma letra mais legível no quadro, para todos.

Na escrita do conjunto dos números reais em compreensão, o Custódio levantou a seguinte questão: " *é obrigatório escrever* $x \in R$ *ou basta escrever* $2 < x < 3$*?*", respondi-lhe: "*sim, imagina que o* x *pertencia aos inteiros (…) neste caso não pertence, porque todos os números compreendidos entre o 2 e o 3 são números reais*". Esclareci também o grupo-turma que têm sempre de referir em que universos estão a trabalhar. Considero que neste momento podia ter concretizado esta intervenção, apresentando um exemplo em que os elementos x pertencessem aos inteiros ou aos naturais, em vez de pertencerem aos reais, para que os alunos percebessem melhor esta diferença.

Na segunda parte da aula, os alunos trabalharam autonomamente nas tarefas (Anexo 3, p.144), não evidenciando ter dúvidas. Cinco minutos antes da aula terminar, procedi à marcação do trabalho de casa e à recolha das produções dos alunos. Considero que, de uma maneira geral todos os grupos trabalharam bem. Nesta aula houve uma maior flexibilização dos tempos de trabalho previstos, pelo que os alunos trabalharam mais ao seu ritmo.

6 de Março de 2013 – Quarta-feira – 90min

Embora antes do toque da campainha eu já estivesse na sala de aula com os materiais prontos a utilizar, toda a turma chegou neste dia com um atraso de 12 minutos, sendo a sua entrada mais prolongada que o habitual. Nesta aula contei com o acompanhamento do professor orientador junto do grupo do Rodrigo.

Esta aula ficou marcada essencialmente por dois momentos, sendo um primeiro construído sobretudo pela minha interação com a turma, apoiada nos trabalhos dos alunos e em exemplos teóricos (da interseção e reunião de intervalos), com vista a interpolar e provocar reações no grupo-turma. E um segundo momento dedicado ao trabalho autónomo. Embora o plano previsto tenha sido cumprido no seu essencial, confesso que gostaria de ter dedicado mais tempo ao trabalho autónomo dos alunos.

Iniciei a aula projetando o sumário e fiz a verificação do trabalho de casa, questionando os alunos para a existência de dúvidas. Dois alunos referiram que não conseguiram fazer o T.P.C. porque tinham algumas dúvidas na representação gráfica das bolas fechadas ou abertas nos extremos dos intervalos. Às 10h22 (17 minutos após o toque de entrada) projetei a resolução do aluno Rodrigo, servindo-me desta para proceder à correção do exercício da aula anterior. Solicitei o grupo-turma que confrontasse as suas resoluções com a do colega, uma vez que a sua resolução estava praticamente toda certa.

Enquanto os alunos corrigiram a lápis o que tinham feito mal, chamei a atenção do grupo-turma que a escrita da expressão $\{x \in R : -\infty < x \leq 5\}$ é um erro, por considerar difícil explicar para os alunos deste nível etário, que este tipo de escrita não faz sentido na relação de menor em *R*. No entanto podia ter referido apenas que a escrita $-\infty < x$ é desnecessária. Em virtude da correção do trabalho de casa não se encontrar integralmente nas soluções procedi à correção do mesmo e aproveitei para fazer uma breve revisão dos intervalos, de modo a esclarecer os alunos que ainda tinham dúvidas e para que aqueles que faltaram à aula anterior conseguissem mais facilmente acompanhar a matéria.

Às 10h33 lancei para turma a seguinte questão, do slide 9: "o que é que representa (para vocês) a interseção de dois conjuntos?" Poucos alunos pareciam não perceber o que estava a ser perguntado, pelo que, questionei de novo "*o que é para vocês a interseção de dois conjuntos?*". Sendo a questão apresentada no slide difícil de responder devia ler-se: "o que é a interseção de conjuntos?" em vez de "o que representa a interseção de conjuntos?".

Houve no entanto, alunos que deram respostas interessantes referindo que: a interseção "*é quando um conjunto interseta o outro*", "*é um elemento do conjunto (ou vários) que está (estão) dentro do conjunto do outro*", "*é quando eles se cruzam*". E que a reunião "*é quando começa um e acaba o outro*", "*é quando pelo menos um dos elementos do conjunto é igual ao outro conjunto*". Denotei assim que embora exista uma dificuldade clara dos alunos em exprimir por palavras o que é a interseção e a reunião, percebe-se pelas suas explicações que estes já têm uma conceção relativa a estas noções.

Julguei inicialmente que os alunos se fossem lembrar do diagrama de veen, estabelecendo uma conexão com o tópico das probabilidades, mas tal não aconteceu. Embora tenha recorrido a um exemplo com números naturais, podia também ter exemplificado com um diagrama, para que fosse mais fácil para os alunos perceber o que é a interseção e a reunião. Após ter apresentado o exemplo do slide 9, expliquei os significados destes conceitos e pedi para que os alunos os registassem nos seus cadernos. Visto que a palavra "simultaneamente" na definição do que é a interseção apela mais ao tempo do que ao espaço, considero que alternativamente podia ter utilizado no slide 9 a palavra "comum".

Nesta aula utilizei no diálogo com os alunos a escrita no quadro de "pontos de interrogação", deixando algumas questões em suspenso para lançar a discussão à turma. Por exemplo, no momento de discussão perante uma aluna que respondeu que 4 pertencia ao intervalo $[-5,5]$ escrevi no quadro a sua afirmação "$4 \notin [-5,5]$?", recorrendo-me do ponto de interrogação, deixando a aluna decidir se este elemento (o 4) pertencia ou não a esse intervalo. Neste sentido, considero que o jogo comunicacional é decisivo, porque ajuda à autonomia e a auto-confiança dos alunos.

Às 10h50 projetei alguns exemplos da interseção e da reunião de intervalos, solicitando a colaboração do grupo-turma para a sua resolução. Nesta aula três alunos voltaram a evidenciar a mesma dificuldade do aluno Custódio na aula anterior, em compreender porque é que os números reais situados entre o 2 e o 4 inclusive, não podiam ser apenas o 2, o 3 e o 4. Chamei a atenção destes alunos, que só estavam a considerar os números naturais e que deviam incluir os restantes números reais. Ao questionar o Hugo (que evidenciou ter dificuldades nesta matéria) sobre "*qual é a região onde os dois intervalos se sobrepõe?*", o aluno concluiu corretamente que o intervalo correspondente seria de 2 a 4, fechado à esquerda e à direita.

Às 11h03 os alunos iniciaram o trabalho autónomo. Durante este momento após ser questionada pelo grupo do Rodrigo se era necessário na representação gráfica pintar aquela área, referi "*que era a região toda, e não apenas a reta real*". Relativamente a esta questão podia ter salientado que a representação gráfica "*é feita somente na reta real*". Nos últimos minutos da aula, marquei o trabalho de casa e recolhi as produções dos alunos.

11 de Março de 2013 – Segunda-feira – 90min

A entrada dos alunos na sala de aula decorreu de forma mais agitada que o habitual, uma vez que estes estavam ansiosos por receber os testes. Ao contrário do previsto no plano de aula, o primeiro momento foi destinado à entrega dos testes, demorando aproximadamente 8 minutos. Esta aula teve como principal objetivo fazer com que os alunos desenvolvessem a sua capacidade para resolver problemas envolvendo intervalos de números reais e introduzir a matéria dos valores aproximados. De um modo geral, considero que esta aula correu bem, porque o ambiente esteve agradável, descontraído e os grupos trabalharam bem, revelando-se bastante participativos nas idas ao quadro.

Iniciei a aula com a projeção do sumário e informei a turma que teriam cerca de 10 minutos para resolver a tarefa "Perímetro do triângulo" (Anexo 3, p.145), aproveitando também este primeiro momento de trabalho autónomo, para fazer pontualmente a verificação do trabalho de casa e esclarecer algumas dúvidas. Nesta tarefa todos os grupos concluíram que $x < 10$, pelo facto do perímetro ser inferior a 40. No entanto, houve um grupo que inicialmente pensava que x podia ser também igual a 10, pelo sugeri que lessem de novo o enunciado. Depois de lerem a palavra "inferior" perceberam que essa medida apenas podia ser menor e não igual 10. Noutro grupo, quando confrontei os alunos com a sua resposta de $]0,10[$ perguntando-lhes se era possível o outro lado x medir uma unidade, disseram-me que não. Ao questionar de novo o grupo dizendo "*Não se recordam de nenhuma propriedade dos triângulos?*" o Rui lembrou-se a propriedade da desigualdade triangular, trabalhada em anos anteriores.

A discussão da primeira tarefa iniciou-se às 10h30 no quadro. Vários grupos foram incentivados por mim a ajudar-me a corrigir esta tarefa no quadro, e em diversas circunstâncias recorri à semelhança da aula anterior aos pontos de interrogação, com a intenção de desenvolver o seu pensamento e raciocínio matemáticos. Depois de recordar o grupo-turma da propriedade da desigualdade triangular, os alunos concluíram que afinal só seria possível construir o triângulo pretendido se o comprimento do outro lado x medisse mais que 6 cm.

Os grupos retomaram o momento de trabalho autónomo às 10h40. Nas questões 2.1 e 2.2 a generalidade da turma não teve dificuldades e diversos grupos quando os questionei nesta alínea para o que estava a acontecer ao sentido da desigualdade, responderam-me sem hesitação que na primeira alínea se mantinha e na segunda se invertia, devido ao sinal. Creio assim que, os alunos recordaram a correção que fiz a lápis nas produções escritas do dia 26 de Fevereiro, e perceberam a importância da palavra "sentido da desigualdade".

Finalmente na correção tarefa "π" (Anexo 3, p.145), iniciada às 10h55, vários alunos manifestaram interesse e entusiasmo, pedindo-me para irem ao quadro corrigi-la. Como haviam apenas quatro alíneas, foram quatro alunos ao quadro resolver cada uma delas. As alíneas a) e d) não suscitaram dúvidas.

Na alínea b) o grupo da Clara evidenciou algumas dificuldades na comparação dos números apresentados, cometendo frequentemente o mesmo erro no uso dos sinais maior que e menor que, confundindo sempre os dois. Na alínea c) houve, em alguns grupos, uma grande hesitação sobre qual seria a pior aproximação, se a do povo hindu ou romano, evidenciando algumas dificuldades. Nos últimos 25 minutos da aula, a professora cooperante retomou o momento de entrega dos testes, e procedeu à sua correção.

Observação:

Nas aulas subsequentes, de terça e quarta-feira, respetivamente nos dias 12 e 13 de Março a professora cooperante encarregou-se de continuar a lecionar este tópico, no que diz respeito às operações com números reais e aos enquadramentos. A realização de tarefas com enquadramentos não suscitou grandes dúvidas, por parte da maioria dos alunos. No entanto, no tópico das operações com números reais, quando um aluno foi solicitado a ir ao quadro fazer a correção de um dado problema, procedeu incorretamente à soma dos números apresentados na forma de raiz, escrevendo no quadro "$\sqrt{25}-\sqrt{5}=\sqrt{20}$". Reparei por observação direta que todos os alunos passaram para o caderno esta resolução incorreta, pelo que senti necessidade de chamar a atenção dos dois grupos que estive a acompanhar nestas aulas, para visualizarem na máquina de calcular se este resultado faria sentido. Depois de perceberem que a propriedade da adição (ou subtração) não é válida na soma de raízes, os alunos procederam à sua correção. O estudo das inequações foi iniciado no 3.º período, tendo sido nele retomado em particular a representação dos intervalos de números reais e as relações de ordem de menor e maior em *R*.

3.5 Recolha de dados

Neste subcapítulo apresento as opções metodológicas adoptadas no estudo, os instrumentos utilizados na recolha de dados e os participantes envolvidos.

3.5.1 Opções metodológicas

Com este estudo pretendo compreender as principais dificuldades dos alunos e os processos que estes utilizam na resolução de tarefas que envolvem a noção de número real. A metodologia adotada neste estudo seguiu uma abordagem qualitativa de natureza interpretativa. Procurei através da observação, da interação e do diálogo perceber como é que os alunos estavam a pensar num determinado momento. Stein e Smith (1998, pp.12-13) evidenciam esta ideia quando dizem que o professor deve procurar perceber exactamente "o que se está a passar no pensamento dos alunos, enquanto eles trabalham numa tarefa específica". Para compreender o modo como os alunos pensam, é necessário incentivar os mesmos a justificarem as suas respostas e é quase necessário que o professor "entre na cabeça do aluno" e pense como ele, para poder compreender as suas dificuldades.

A explicitação dos processos de raciocínio e das dificuldades dos alunos na resolução de tarefas pode constituir uma tarefa árdua, porque isso exige que o próprio aluno seja capaz de exprimir em linguagem natural oral todo o processo matemático envolvido. Os investigadores Silva & Penteado (2009, p.362) concordam que muitas vezes a maior dificuldade dos alunos consiste precisamente em justificar as suas respostas, ao mencionar que *"colocar verdadeiro ou falso é fácil, o difícil é justificar depois"*. No capítulo seguinte, pode-se observar que nos diálogos com os alunos, na minha atividade de docente e investigadora procurei com frequência fazer com que os alunos justificassem as suas respostas, questionando-os: *"porquê?"*, *"como justificariam?"*, *"como é que viste?"*. Embora este tipo de questões aparentem ser simples, na minha perspetiva fazem toda a diferença na perceção do docente em relação às dificuldades dos alunos e processos utilizados na resolução de tarefas específicas.

Devo ainda frisar que, os diálogos criados em sala de aula são muito mais que meros apoios ao raciocínio e pensamento matemáticos dos alunos. Muitas vezes, na abordagem aos alunos, deparei-me no mesmo momento a fazer uma espécie de avaliação formativa, a cada um dos elementos de um dado grupo. Na minha perspetiva a avaliação formativa dá ao professor e investigador outras informações que um simples teste não dá. Perceber *in situ* o que os alunos pensam é uma condição importante porque ajuda o docente a compreender onde estão a ter dificuldade, podendo retomar a matéria e reforçar a sua aprendizagem.

Segundo Bogdan e Biklen (1994) citados por Serrazina & Oliveira (2001, p. 286), "os professores ao agirem como investigadores não só realizam o seu trabalho, mas também se observam a si próprios e são capazes de alargar as suas perspectivas sobre o que acontece". Neste estudo procurei estar atenta não só ao trabalho dos alunos, mas também ao meu próprio trabalho. À semelhança do que refere Brunheira (2000, p.238) o meu estudo permitiu-me: refletir sobre a minha prática de ensino, estabelecer uma ligação entre o meu conhecimento teórico e a prática profissional e envolver na problematização da prática.

3.5.2 Instrumentos de recolha de dados

Tendo em conta o objetivo e questões do estudo, a recolha de dados realizou-se recorrendo essencialmente a: observação direta e produções escritas, que envolvem a compreensão da noção de número real. Recorri-me também da utilização da gravação áudio das interações verbais em alguns grupos, da captação por imagem de algumas produções escritas no quadro e elaborei um "diário de bordo" que serviu essencialmente para a produção das descrições sumárias das aulas. Brunheira (2000, p.237) destaca a utilidade do *diário de bordo*, que para além de permitir recolher dados de uma forma natural, ajuda a de ter uma visão progressiva e continuada do trabalho realizado e refletir "sobre o estudo à medida que este vai decorrendo". Em todas as aulas os trabalhos foram realizados em grupos (de 2 a 4 alunos) e como tal, solicitei em algumas delas que um representante de um dado grupo fosse ao quadro corrigir uma determinada tarefa. Na descrição da caracterização da turma recolhi a toda a informação que me for disponibilizada pela Diretora de turma do 9.º ano.

Para Stein & Smith (1998) a observação e as gravações em aula constituem instrumentos preponderantes na prática reflexiva do docente das aprendizagens dos alunos. A observação direta do trabalho dos alunos permite ao docente ter uma melhor percepção da dinâmica de sala de aula, do raciocínio matemático dos alunos e da forma como estes lidam com a comunicação quer natural, quer matemática por meio da utilização de símbolos ou de representações. Por sua vez, a gravação em áudio permite recolher também elementos relativos à capacidade transversal da comunicação matemática captando interacções, diálogos entre os alunos e discussões gerais ou particulares sobre as tarefas propostas. No desenvolvimento das aulas observei o trabalho de todos os alunos, procurando preencher todo o espaço da sala de aula, de modo a acompanhar de forma próxima e individual cada grupo.

Relativamente à gravação áudio, esta foi feita tendo por base uma seleção prévia dos grupos, tendo em conta diferentes níveis de desempenho e também os pedidos de autorização solicitados aos encarregados de educação (ver Anexo 6, p.152). Em todas as aulas procedi à gravação de três grupos de trabalho. Houve casos em que o gravador captou elementos de discussão coletiva que também foram integrados na análise, sempre que se achou pertinente. As gravações foram também importantes, para compreender dificuldades que se evidenciaram mais tarde nos testes de avaliação. No final de cada aula, analisei e reflecti sobre a informação recolhida, servindo esta de complemento à elaboração das memórias descritivas do diário de bordo.

As resoluções escritas dos alunos são um instrumento central na recolha de dados. Muitas das produções serviram de base, para proceder à correção e chamadas de atenção de dificuldades ou incoerências generalizadas na turma. As transcrições de diálogos complementam de certo modo estas produções escritas e foram importantes para compreender de que forma os alunos desenvolvem a sua comunicação oral, argumentam e justificam as suas respostas, permitindo-me ter uma melhor perceção dos erros e dificuldades cometidos e dos processos de raciocínio desenvolvidos. Esta recolha documental permitiu-me também comparar diferentes níveis de desempenho, quer escritos, quer orais.

Durante o período da lecionação desta unidade, foi realizado um teste no dia 4 de Março e mais tarde, já no 3.º período, os alunos realizaram um outro teste no dia 13 de Maio. Ambos os testes incidiram sobre tarefas que envolveram a aprendizagem dos números reais. Esta análise foi feita em colaboração com a professora cooperante, tendo sido os critérios de avaliação previamente discutidos. A análise de ambos os testes, presente nos Anexos 4 e 5 (pp.147-149), inclui as respostas de todos os alunos da turma, com nomes fictícios (por questões de ética e de privacidade) bem como as classificações obtidas em cada uma das questões. Essa análise permitiu-me estabelecer a ponte entre as aprendizagens dos alunos e a unidade lecionada. No teste intermédio não saiu matéria referente aos números reais e por isso este não se inclui nesta análise.

3.5.3 Participantes do estudo

No início da minha prática letiva, procedi à formação de seis grupos de trabalho, procurando manter os grupos habituais do 1.º período. Como já foi referido na caracterização da turma, houve duas alunas que saíram da escola, e como tal houve algumas adaptações. Procurei respeitar a distribuição dos alunos na sala feita pela Diretora de turma e as amizades, no sentido de favorecer o espírito de inter-ajuda entre os grupos.

Uma vez que, em dois dos grupos formados, alguns dos seus membros não tinham autorização dos encarregados de educação para proceder às gravações áudio, selecionei três grupos de trabalho com níveis de desempenho distintos: fraco, médio e bom. Dos restantes quatro grupos de trabalho que tinham autorização para gravar, dois deles tinham um bom desempenho à disciplina de matemática, pelo que escolhi um desses dois grupos. Nas discussões em grande grupo, para além dos três grupos em estudo, houve dois alunos que se destacaram pelas suas participações orais e escritas no quadro, sendo estes, o aluno Hugo e o Mário, pelo que decidi incluir sempre que pertinente elementos desses alunos.

A formação dos grupos foi inicialmente uma tarefa difícil, pois embora procurasse criar grupos com vista a heterogeneidade, alguns alunos revelaram o gosto pela homogeneidade, uma vez que afirmavam que por diversas razões se sentiam desconfortáveis por não conseguir acompanhar o ritmo de trabalho dos alunos com níveis de raciocínio e desempenho mais avançados. Neste sentido, procurei criar um ponto de equilíbrio, fazendo com que houvesse também grupos heterogéneos. Os três grupos escolhidos foram: o da Clara (formado pela Clara, Rodrigo e Sónia), o do Rui (formado pelo Rui, Gaspar e Custódio), e da Íris (constituído pela Íris e pela Júlia).

O grupo da Clara é heterogéneo do ponto de vista dos conhecimentos matemáticos e do desempenho dos alunos. A Clara e Rodrigo que têm um melhor desempenho nas tarefas matemáticas gostam de ajudar a sua colega Sónia, que é uma aluna que têm muitas dificuldades a matemática e que desde o início do ano letivo demonstra um grande desinteresse e desmotivação por esta disciplina.

O grupo da Íris é da mesma forma heterogéneo. A Júlia embora seja interessada e trabalhadora, tem muitas dificuldades na disciplina de matemática, solicitando frequentemente à sua colega de carteira Íris, que lhe explique a matéria. Durante o período de lecionação a Júlia e a Sónia (dos grupos da Íris e da Clara) foram alguns dos alunos que acompanhei nas aulas de apoio, de forma mais próxima. O grupo do Rui é mais homogéneo com a participação dos alunos mais enriquecida por discussões ricas e interessantes, que envolvem raciocínios, processos e ideias matemáticas elaboradas.

Foi essencialmente com base nas intervenções destes três grupos que elaborei a análise de dados que apresento no capítulo seguinte. Faço a seguir uma breve caracterização de cada um:

Grupo da Clara – formado pela Clara, Rodrigo e Sónia. A Clara é uma aluna com 14 anos. É das alunas que mais participa e vai ao quadro. A Clara gosta de ajudar a amiga e colega Sónia, procurando em conjunto com o seu colega Rodrigo explicar-lhe a matéria. No 1.º período obteve nível 5 à disciplina, no entanto as notas dos testes no 2.º e 3.º períodos desceram para o nível 4. A aluna refere que tem *"uma relação boa"* com a disciplina de matemática. O Rodrigo tem 13 anos, é participativo e é um aluno de nível 4, descrevendo a sua relação com a matemática útil ao dizer *"utilizo-a todos os dias"*. A Sónia tem 13 anos, é uma aluna de nível 2 e é pouco participativa. A Sónia define a sua relação com a matemática como *"não é muito boa"*.

Grupo da Íris – formado pela Íris e Júlia. A Íris é uma aluna que tem 13 anos, participativa e que procura estar atenta nas aulas. A Íris realiza um trabalho muito individual, no entanto quando a Júlia lhe pede ajuda ou alguma explicação, de imediato a aluna, que é sua colega de carteira procura esclarecê-la. É uma aluna de nível 4, no entanto no Exame Nacional baixou para nível 3. A Íris define a sua relação com a disciplina como sendo *"boa"*. A Júlia é uma aluna com 14 anos e embora seja trabalhadora e atenta nas aulas, não gosta de participar em discussões coletivas porque tem vergonha de responder, de errar e nota-se por vezes que se sente insegura em relação aos seus conhecimentos. Esta aluna é de nível 3, e descreve a sua relação com a disciplina como sendo *"média"*. No Exame Nacional a Júlia baixou a sua nota para nível 2, manifestando ao longo do ano letivo muitas dificuldades na disciplina de Matemática.

Grupo do Rui – formado pelo Rui, Gaspar e Custódio. Este grupo tem um gosto especial pelo confronto e discussão de resultados. O Rui tem 14 anos, é um aluno que procura estar atento nas aulas e é pontualmente participativo. O Rui define a sua relação com a disciplina da seguinte forma *"gosto muito, mas há matérias em que tenho muita dificuldade"*. É um aluno de nível 5, no entanto no Exame Nacional baixou para nível 3, terminando o ano letivo com nível 4. O Gaspar e o Custódio também têm 14 anos. O Gaspar é um aluno de nível 5 que afirma que *"gosta de matemática, sou relativamente bom"* e o Custódio é um aluno de nível 4 e tem 14 anos, referindo que tem uma *"boa"* relação com a matemática.

Para além destes três grupos, utilizei com alguma frequência as intervenções do Hugo que a seguir caraterizo. Como no grupo do Hugo, havia alunos que não tinham autorização para gravar, não fiz gravações do grupo.

Hugo – é um rapaz com 14 anos, tem uma grande dificuldade em concentrar-se nas aulas e só participa quando é solicitada a sua intervenção. Nota-se que este aluno tem muitas dificuldades, talvez devido a falta de bases relativamente aos anos anteriores. No 1.º período obteve nível 3 à disciplina, no entanto as notas dos testes no 2.º e 3.º períodos desceram para o nível 2. O aluno define a sua relação com a disciplina como sendo *"má, não gosto de matemática"*.

No capítulo seguinte, as produções escritas dos alunos são legendadas como sendo de um grupo, quando todos os membros deram a mesma resposta, chegando a um consenso. Quando isso não aconteceu, a produção é identificada especificamente com o nome do aluno respetivo (fictício).

Capítulo 4 – Apresentação e análise de dados

Tendo em conta o objetivo e as questões formuladas no estudo, neste capítulo descrevo e analiso os dados recolhidos, durante a unidade de ensino por mim lecionada. A análise incide sobretudo sobre as produções escritas dos alunos e as transcrições dos diálogos nos grupos, das discussões com o grupo-turma e de questionamentos individuais e aos grupos de trabalho sobre como o modo procederam na realização de uma dada tarefa.

Este capítulo está organizado de modo a responder às várias questões de estudo que incidem sobre a distinção entre números racionais e irracionais, representação de números reais na recta numérica, comparação de números reais e representação de intervalos de números reais.

4.1 Distinção entre números racionais e números irracionais

4.1.1 Números racionais como dízimas finitas ou infinitas periódicas

Todas as tarefas propostas em aula envolvem a noção de número real e consequentemente a necessidade de saber representar os números racionais e irracionais. A tarefa "Sequência de figuras" (Anexo 3, p. 139) tinha como objectivo principal fazer com os alunos retomassem e aprofundassem o seu conhecimento acerca dos números racionais, transitando entre os dois registos de representação, correspondentes à forma de fração e decimal. Recordo que, nesta tarefa houve a preocupação de chamar a atenção das duas possibilidades de representação das dízimas infinitas periódicas: com o uso das reticências ou colocando entre parêntesis o período da dízima.

Nas primeiras três questões evidenciaram-se dificuldades em representar uma dízima infinita periódica correspondente a um número racional (em cerca de 30% dos alunos). Por exemplo, na questão 1.1 pedia-se as frações e as dízimas correspondentes que representassem a parte sombreada de cada figura, dividida em partes iguais:

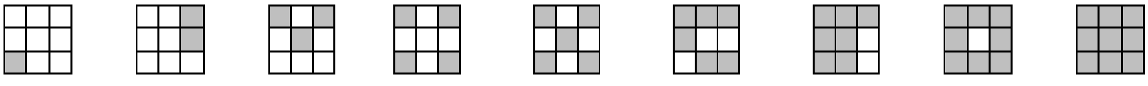


Figura 2 – Ilustração do enunciado da tarefa "Sequência de figuras"

Para responder a esta questão, os alunos usaram a calculadora e, nos três grupos que estudei com mais profundidade, todos responderam correctamente — com a indicação do período de cada dízima ou utilizando reticências, à excepção da Clara que apresentou a seguinte resposta:

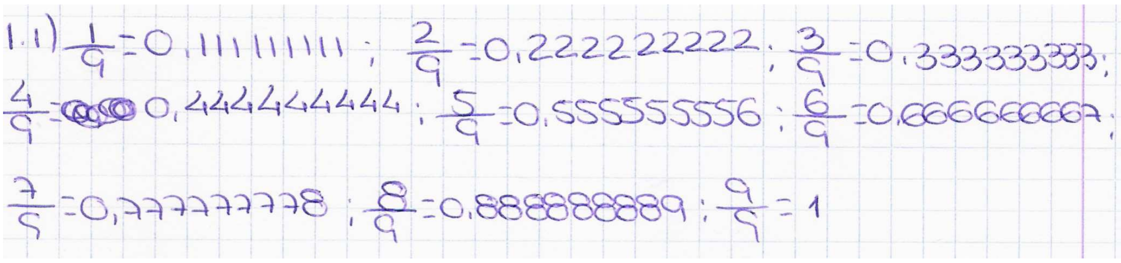

1.1) $\frac{1}{9}=0,11111111$; $\frac{2}{9}=0,222222222$; $\frac{3}{9}=0,333333333$;
$\frac{4}{9}=0,444444444$; $\frac{5}{9}=0,555555556$; $\frac{6}{9}=0,666666667$;
$\frac{7}{9}=0,777777778$; $\frac{8}{9}=0,888888889$; $\frac{9}{9}=1$

Figura 3 – Resposta da Clara à questão 1.1 da primeira tarefa

A Clara limita-se a usar os dígitos que o visor da calculadora mostra para escrever a dízima correspondente a cada uma das frações, erro que também aconteceu com alguns outros alunos, fazendo-me crer que o uso da calculadora tem uma forte influência na resposta que a aluna apresenta, e o número representado pela dízima infinita e a sua aproximação parecem ter para ela o mesmo significado.

Nesta questão, houve ainda um aluno, o David, que apresentou a seguinte resposta:

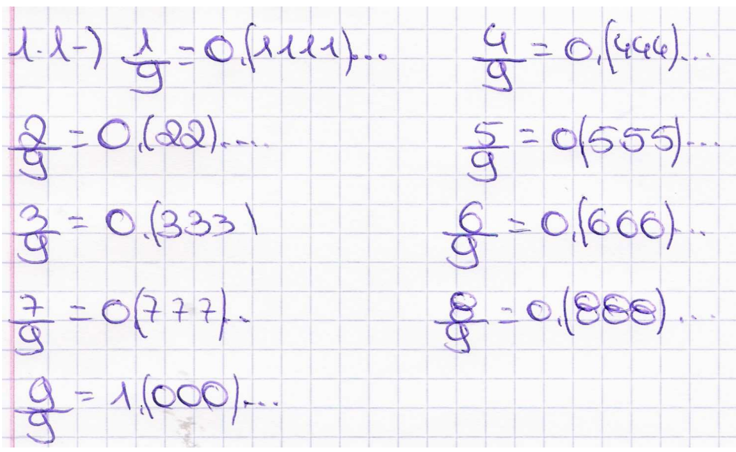

1.1-) $\frac{1}{9}=0,(1111)...$
$\frac{2}{9}=0,(22)...$
$\frac{3}{9}=0,(333)$
$\frac{7}{9}=0(777)..$
$\frac{9}{9}=1,(000)...$
$\frac{4}{9}=0,(444)...$
$\frac{5}{9}=0(555)...$
$\frac{6}{9}=0,(666)..$
$\frac{8}{9}=0,(888)...$

Figura 4 – Resposta do David à questão 1.1 da primeira tarefa

O David evidencia (na figura 4) a ideia de período de uma dízima, ainda que o represente incorretamente e use as reticências redundantemente.

No que diz respeito às duas questões seguintes (veja-se por exemplo na questão 1.3) a Clara e o David voltaram a repetir as mesmas incorreções evidenciadas na questão 1.1:

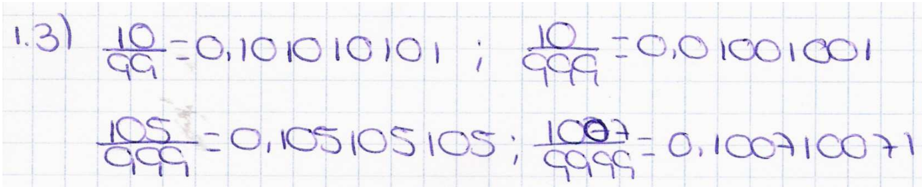


Figura 5 – Resposta da Clara à questão 1.3 da primeira tarefa

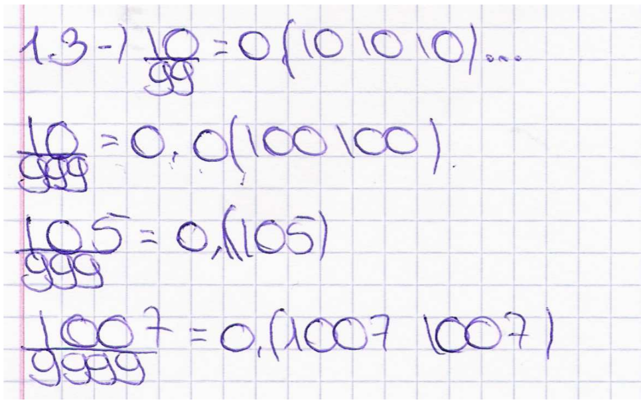


Figura 6 – Resposta do David à questão 1.3 da primeira tarefa

Como já foi descrito no capítulo anterior cerca de metade da turma (correspondente a três grupos de trabalho) conseguiu resolver as duas últimas alíneas e chegar a generalização pretendida, embora algumas respostas tenham ficado um pouco incompletas. A questão 1.4 (Anexo 3, p.139) solicitava que se escrevesse na forma de fração cada uma das dízimas infinitas periódicas apresentadas. Do conjunto de alunos que resolveram ambas as questões, todos evidenciaram perceber o processo de tradução da dízima infinita periódica para a forma de fração, até com algum entusiasmo: “ *já estou a perceber aqui uma coisa*”, “ *faz lá 45 a dividir por 99”*, *“está mesmo muito fixe, já viram como é que isto fica? Dá 0, 1007 1007 1007…”*, *“isto é sempre a mesma regra!”.*

Na sequência do trabalho realizado na questão 1.4., a questão 1.5 pedia aos alunos que escrevessem a regra que permite representar qualquer dízima infinita periódica na forma de fração. Foi o grupo do Rui que formulou mais adequadamente esta regra tendo a certa altura solicitado a minha orientação, por não conseguirem interpretar o que se pedia no enunciado:

Rui: Stora o que é que é para pôr aqui na 1.5?

Professora: É para explicarem a regra.

Custódio: Isto é difícil de explicar. Então o número de casas decimais que o dígito [refere-se à dízima] tem…não sei explicar.

Professora: Como pensaram neste aqui [questão 1.4]?

Rui: Se 10 a dividir por 99 dá a repetição do 10, então aqui [questão 1.4] se meter o 45 a dividir por 99 vai dar sempre isto... o 45 repete.

Professora: Na questão 1.4, como pensaram para escrever na forma de fração as dízimas?

Rui: Em cima [no numerador] fica a repetição e em baixo [no denominador] fica o 9 conforme o número de dígitos.

Professora: O número de dígitos de quê?

Rui: Do número que repete. Da repetição.

Repare-se que, embora o Rui evidencie ter compreendido o processo que permite colocar na forma de fração qualquer dízima infinita periódica, não recorreu ao termo período, apesar de já ter sido utilizado nas questões anteriores, o que me levou a prosseguir no diálogo como mostro a seguir:

Professora: E que tipo de número é este [0,454545…]?

Rui: Dízima infinita periódica.

Professora: Periódica. Vocês estão todos a ouvir? Qual é aqui o período?

Gaspar e Custódio: Sim stora. É 45.

Rui: É o número de dígitos do período!

Gaspar: Sim, é o número de dígitos do período stora, se o período é 45, é 45 a dividir por 99. O período como tem dois dígitos, [o denominador] tem dois noves.

Professora: Então e neste aqui como é que vocês fizeram? No 0,(135924680)?

Gaspar, Rui e Custódio: Tem nove dígitos, logo [o denominador] vai ter nove noves.

Professora: Então qual é a regra? Como é que vocês explicam?

Rui: Para colocar uma dízima infinita periódica na forma de fração tem de se colocar o valor do período no local do numerador, e no local do denominador, tem de se colocar o número de noves correspondente ao número de dígitos do período.

Devo salientar que o que o Rui disse na sua última fala foi justamente a resposta que o grupo deu à questão 1.5:

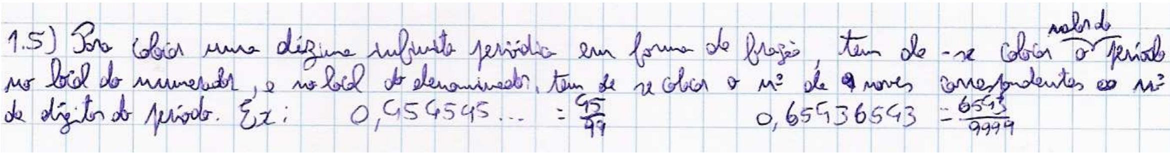

1.5) Para colocar uma dízima infinita periódica em forma de fracção, tem de-se colocar o valor do período no local do numerador, e no local do denominador, tem de se colocar o nº de noves correspondentes ao nº de dígitos do período. Ex: 0,959595... = $\frac{95}{99}$ 0,65936593 = $\frac{6593}{9999}$

Figura 7 – Resposta do grupo do Rui à questão 1.5 da primeira tarefa

A minha interacção por meio do diálogo com os alunos do grupo do Rui, pontuada por sucessivos questionamentos da minha parte, permitiu-lhes exprimir mais facilmente os seus raciocínios e argumentações, de modo a conseguirem dar uma resposta completa

Dos outros dois grupos que estudei, um, o da Íris, não chegou a responder à questão 1.5, e no grupo da Clara evidenciaram-se algumas dificuldades. Estas dificuldades também se manifestaram em outros alunos da turma, principalmente associadas à tradução para linguagem natural da conclusão a que chegaram através do seu raciocínio matemático indutivo, isto é, baseado na experimentação com casos particulares. Veja-se as respostas que a seguir apresento:


1.5) A regra difere com a quantidade de algarismo do numerador.

Figura 8 – Resposta do grupo da Clara à questão 1.5 da primeira tarefa

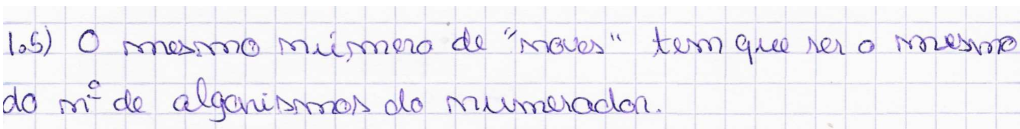

1.5) O mesmo número de "noves" tem que ser o mesmo do nº de algarismos do numerador.

Figura 9 – Resposta do grupo do Mário à questão 1.5 da primeira tarefa

Embora o grupo da Clara (na figura 8) não consiga exprimir a regra solicitada, mostra com a formulação que apresentou algum sentido de generalização, dando a entender ainda que de forma imprecisa, que identificou uma regularidade, relacionada com o número de algarismos do numerador. Com a expressão "quantidade de algarismo[s]", percebe-se que os alunos se estão a referir ao número de algarismos do numerador. A formulação do grupo do Mário apresentada na figura 9 aproxima-se mais da regra pretendida, mostrando que compreendeu a ideia matemática envolvida, identificando elementos essenciais da regularidade (e apenas não utiliza o noção de período).

Numa extensão da questão 1.4, apresentada na aula que se seguiu à da tarefa "Sequência de figuras" e que consistia em escrever na forma de fração a dízima infinita periódica 1,4444… surgiram estratégias diversificadas em três grupos de trabalho, que foram ao quadro expor a sua resolução.

O grupo da Íris começou por explicar que descobriu o número $13/9$ por tentativa-erro (na figura 10). A Íris explicou em voz alta para os colegas que utilizou a calculadora para determinar quocientes, mudando apenas "o numerador" até obter no visor da máquina a dízima pretendida. A aluna referiu também que manteve o denominador igual a 9, visto que o período da dízima tinha apenas um único algarismo.

Figura 10 – Resposta do grupo da Íris à extensão da questão 1.4 da primeira tarefa

O grupo da Clara referiu que tinha recorrido a uma equação. O seu representante no quadro, começou por escrever a equação $1,(4) = \frac{x}{9}$, depois escreveu $x = 1,(4) \times 9$, calculou o valor de x introduzindo na máquina 1,444444444 como se a dízima $1,(4)$ se tratasse de um número exato, e multiplicou por 9. Obteve 13 e concluiu que a representação da dízima em fração era $\frac{13}{9}$. A resolução do grupo durante o trabalho autónomo foi a seguinte:

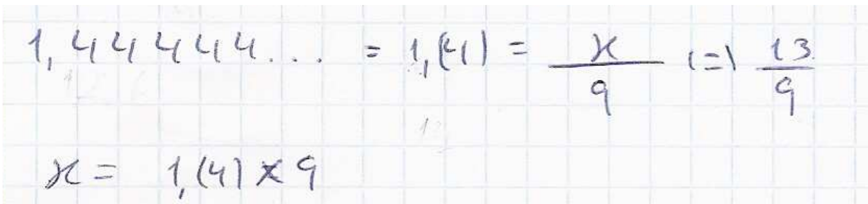


Figura 11 – Resposta do grupo da Clara à extensão da questão 1.4 da primeira tarefa

No grupo da Clara chamei a atenção dos alunos que embora tenham obtido o valor correto de x igual a 13, porque a máquina arredondou o número em questão, existem ainda, outro tipo de máquinas que escrevem a dízima truncando-a no último algarismo que cabe no visor.

Por fim, o grupo do Rui apresentou a sua resolução no quadro (por mim esperada), decompondo o número $1,(4)$ como a adição da sua parte inteira com a parte decimal correspondente à dízima infinita periódica já trabalhada numa questão anterior, conforme se apresenta na figura 12.

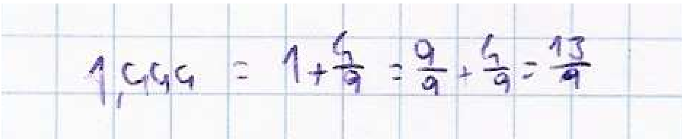


Figura 12 – Resposta do grupo do Rui à da extensão da questão 1.4 da primeira tarefa

4.1.2 Números irracionais como dízimas infinitas não periódicas

A tarefa "*Descoberta de um novo conjunto*" (Anexo 3, p. 140) serviu para fazer a introdução dos números irracionais e para trabalhar a distinção entre números racionais e irracionais, através das definições apresentadas. Esta tarefa suscitou aos alunos uma maior reflexão sobre esta distinção, em virtude de perante um resultado determinado a partir da raiz quadrada de um número terem de o identificar como racional ou irracional. Antes do representante de um dos grupos ter procedido à correção da primeira questão procurei saber junto do grupo-turma se as definições das noções de número racional ou irracional já estavam apreendidas:

Professora: O que são números irracionais?
Vários alunos: Dízimas infinitas não periódicas.
Professora: Conseguem-me dar exemplos de números irracionais?
Rodrigo: O π.
Professora: E porquê? Como sabem que o π é um número irracional?
Rodrigo: Todos os algarismos são diferentes.
Professora: Todos os algarismos são diferentes? Tentem lá explicar isso melhor.
Clara: Porque não se repetem.
Professora: O Rodrigo deu-nos o exemplo do π que é 3,141592… (escrevi no quadro) mas atenção têm a informação toda para dizer que o número é irracional?

Vários alunos: Não.

Professora: Porquê?

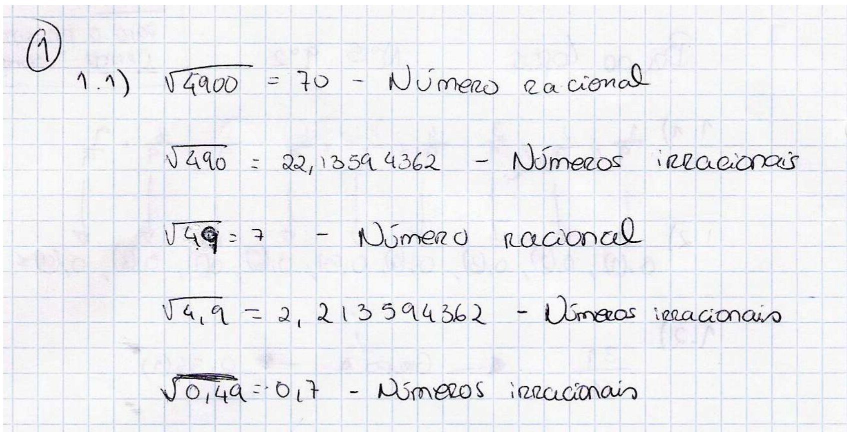
Rui: Não sabemos se o número acaba, pode chegar a um ponto que começa a repetir.

Professora: Vocês sabem que este número é irracional porque alguém vos disse. Qual é a característica de um número irracional?

Mário: É uma dízima infinita não periódica. Não tem período e por isso nunca se repete.

No diálogo com o grupo-turma, apercebi-me que a maioria dos alunos sabia identificar um número irracional com base na sua definição. No entanto, não se pode afirmar com certeza que toda a turma já possui uma aprendizagem significativa, visto a noção de número irracional é complexa e pode demorar muito tempo a ser construída e interiorizada pelos alunos. Repare-se no entanto que, o 1.º exemplo que me foi dado pelo Rodrigo foi o número π, o que mostra que o π é encarado como um dos representantes padrão dos números irracionais, certamente por já ser conhecido de anos anteriores.

Na questão 1.1 da tarefa "Descoberta de um novo conjunto" pedia-se aos alunos que indicassem dos números apresentados: $\sqrt{4900}$ $\sqrt{490}$ $\sqrt{49}$ $\sqrt{4,9}$ $\sqrt{0,49}$, "quais são os racionais e os que podem ser irracionais", podendo usar a calculadora. Durante o trabalho autónomo, a resolução do grupo do Hugo foi a seguinte:


1

1.1) $\sqrt{4900} = 70$ - Número racional

$\sqrt{490} = 22,1359 4362$ - Números irracionais

$\sqrt{49} = 7$ - Número racional

$\sqrt{4,9} = 2,213594362$ - Números irracionais

$\sqrt{0,49} = 0,7$ - Números irracionais

Figura 13 - Resposta do grupo da Hugo à questão 1.1 da segunda tarefa

Na resposta apresentada, aparentemente apenas o número $\sqrt{0{,}49}$ é classificado incorretamente como um número irracional. Repare-se, no entanto, que qualquer número que o grupo representou por uma dízima finita (com parte decimal não nula) foi classificado como "números irracionais" (no plural), fazendo-me crer que o grupo não reconhece uma dízima finita como sendo um número racional.

Na discussão da questão 1.1 desta tarefa solicitei ao Hugo que fosse ao quadro expor a resolução do seu grupo, tendo-se passado o seguinte diálogo à medida que o aluno ia escrevendo as respostas (dadas no lugar):

Professora: Quais é que são aqui [na questão 1.1] os números racionais e os irracionais?

Hugo: Os que são racionais são os que são números inteiros.

(Optei por não corrigir de imediato o aluno, pensando que se referia somente ao primeiro exemplo. Apercebi-me mais tarde que para além do Hugo, outros alunos classificam os números racionais apenas como sendo números inteiros e esquecem-se que as dízimas finitas e infinitas periódicas são também números racionais).

Professora: Por exemplo, $\sqrt{4900}$ é racional ou irracional? E porquê?

Hugo: É racional, porque 70 é um número inteiro.

(Posteriormente o aluno escreve no quadro $\sqrt{490} = 22{,}13594362$).

Professora: Termina no 2?

Hugo: Sim, termina. Porque é o que dá na máquina de calcular.

Professora: Todos concordam que a dízima termina no algarismo 2?

(Uma aluna do grupo do Hugo diz-lhe que se esqueceu das reticências).

Professora: Que tipo de número é esse?

Hugo: É irracional. Porque [a dízima] é infinita, mas não é periódica.

(Repare-se que o aluno nesta fala responde no singular, e não no plural como tinha escrito na sua resolução escrita).

Professora: Todos concordam?

Vários alunos: Sim.

Rui: Oh stora a gente não sabe se aquilo vai voltar a repetir, acaba na calculadora mas não acaba. Nós não temos todos os dados para responder a isso.

Professora: Então o que é que nós podemos dizer em relação a este número?

Mário: Pode ser irracional.

Neste excerto os alunos ao classificarem uma dízima infinita não periódica de “pode ser irracional” perceberam que com o resultado mostrado no visor na máquina de calcular apenas podiam afirmar que um determinado número podia ser irracional. Terminada a apresentação das várias respostas do Hugo, solicitei a validação do grupo-turma ao que estava escrito no quadro:

Professora: Todos concordam com o que o vosso colega escreveu no quadro?

Clara: Não stora. Eu acho que $\sqrt{0,49}$ é racional, porque 0,7 é uma dízima finita.

(Após esta intervenção o Hugo escreveu no quadro 0,7 é um número racional).

Nesta questão, os grupos da Clara e o do Rui classificaram todos os números corretamente, no entanto o grupo da Íris, à semelhança do grupo do Hugo, também classificou inicialmente o número $\sqrt{0,49}$ como sendo número irracional, tendo alterado a sua resposta após a correção feita no quadro.

A questão seguinte 1.2 foi resolvida no quadro pela Clara. Ao solicitar à aluna, que desse exemplos de números racionais cuja raiz quadrada são também números racionais, indicou apenas números inteiros. A figura 14 mostra a resolução do seu grupo a esta questão, durante o trabalho autónomo:

Figura 14 - Resposta do grupo da Clara à questão 1.2 da segunda tarefa

Repare-se que nesta resposta os exemplos são dados indiretamente, mas contém a justificação da sua escolha. Os outros dois grupos, o da Íris e do Rui deram respostas análogas a esta, no entanto percebe-se que na resolução do grupo do Rui (na figura 15) os alunos foram experimentando vários números (por ordem crescente), até que se aperceberam que podiam recorrer aos quadrados perfeitos, para darem a resposta:

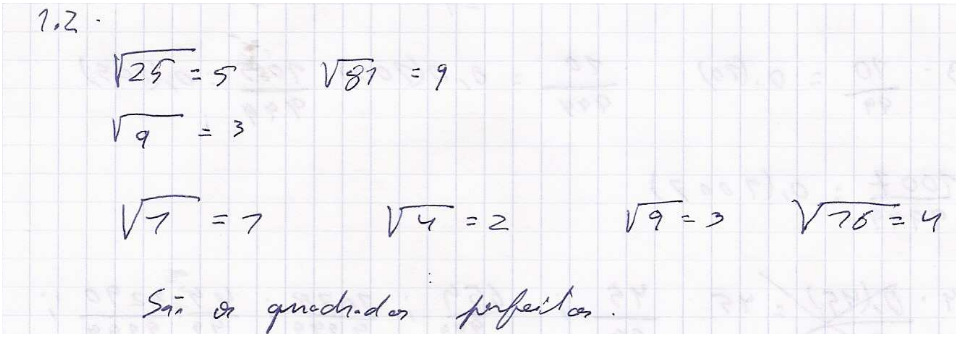


Figura 15 - Resposta do grupo do Rui à questão 1.2 da segunda tarefa

A propósito desta resolução acompanhei o grupo do Rui no lugar, tendo-se passado o seguinte diálogo:

Professora: Que tipo de números são estes [refiro-me aos três exemplos que o grupo apresentou na questão 1.2 respetivamente $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{81} = 9$, $\sqrt{9} = 3$]?

Gama: Racionais!

Custódio: Impares!

(Repare-se que 25, 81 e 9 são por acaso números impares)

Professora: Pensem lá mais um bocadinho. Vão escrevendo os números por ordem.

Custódio: $\sqrt{1}$ dá 1. $\sqrt{2}$?

Gama: $\sqrt{2}$ não dá. $\sqrt{3}$ não dá.

Custódio: $\sqrt{4}$ dá 2. $\sqrt{5}$ não dá. $\sqrt{6}$ não dá.

Gama: $\sqrt{9}$ dá 3.

Professora: Olhem lá para os números que têm agora [refiro-me a $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$ e $\sqrt{16} = 4$]. Qual é o mais pequeno?

Gama: É 1.

Professora: E depois?

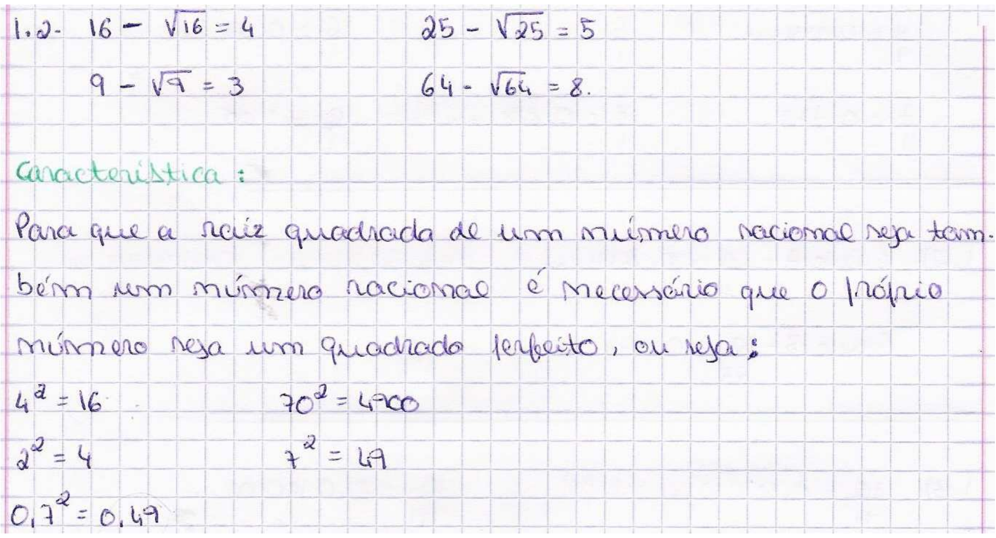
Custódio: 4, 9, 16.

Professora: Que números são?

Rui: São os quadrados perfeitos!

Gama: Ah pois é!

Ao questionar o grupo-turma para *"Que tipo de números são estes?"* [refiro-me aos exemplos pedidos na questão 1.2] os alunos responderam que são *"os quadrados perfeitos"*. Um dos alunos da turma, o Mário, apresentou 0,49 como exemplo de um número racional cuja raiz quadrada é também um número racional (figura 16) e indicou que estes números tinham que ter a propriedade de serem quadrados perfeitos:



1.2- $16 - \sqrt{16} = 4$ $25 - \sqrt{25} = 5$

$9 - \sqrt{9} = 3$ $64 - \sqrt{64} = 8.$

Característica:

Para que a raiz quadrada de um número racional seja também um número racional é necessário que o próprio número seja um quadrado perfeito, ou seja:

$4^2 = 16$ $70^2 = 4900$

$2^2 = 4$ $7^2 = 49$

$0{,}7^2 = 0{,}49$

Figura 16 – Resposta do Mário à questão 1.2 da segunda tarefa

Repare-se que a resolução do Mário está muito completa, apresentando inclusivamente um exemplo de um número racional não inteiro (no entanto considera o quociente entre quadrados perfeitos um quadrado perfeito). Devo referir no entanto que exemplos completos como os que o Mário deu foram raros.

Compreende-se que a maioria dos alunos não tenham apresentado outros exemplos, para além dos quadrados perfeitos, visto que estão mais habituados a trabalhar com números naturais e os cálculos em geral são mais simples.

Na resolução da questão 4 (Anexo 3, p. 140) pedia-se aos alunos que indicassem se determinados números pertenciam ou não a certos conjuntos (N, Z, Q, R, R^+). A generalidade da turma respondeu corretamente à classificação dos números procedendo ao preenchimento dos espaços em branco com a simbologia adequada. No entanto, dois grupos de trabalho, o do Hugo e do Rui, evidenciaram o mesmo erro ao indicar que "$\sqrt{0{,}04} \notin Q$". No grupo do Hugo, os alunos ao determinarem 0,2 introduzindo na calculadora o radical $\sqrt{0{,}04}$ podem ter considerado, à semelhança do que já tinham feito numa alínea anterior, a dízima finita a que chegaram como sendo um número irracional, pelo facto deste não representar um número inteiro.

Para além disso, o grupo do Rui (que até tem um bom desempenho) indicou que “$\sqrt{25} \notin Z$”. Esta afirmação surpreendeu-me, levando-me a crer que os alunos, ao olharem para este radical, não reconheceram o número 25 como sendo um quadrado perfeito. De seguida apresento o enunciado da questão e a resposta do grupo com os erros assinalados:

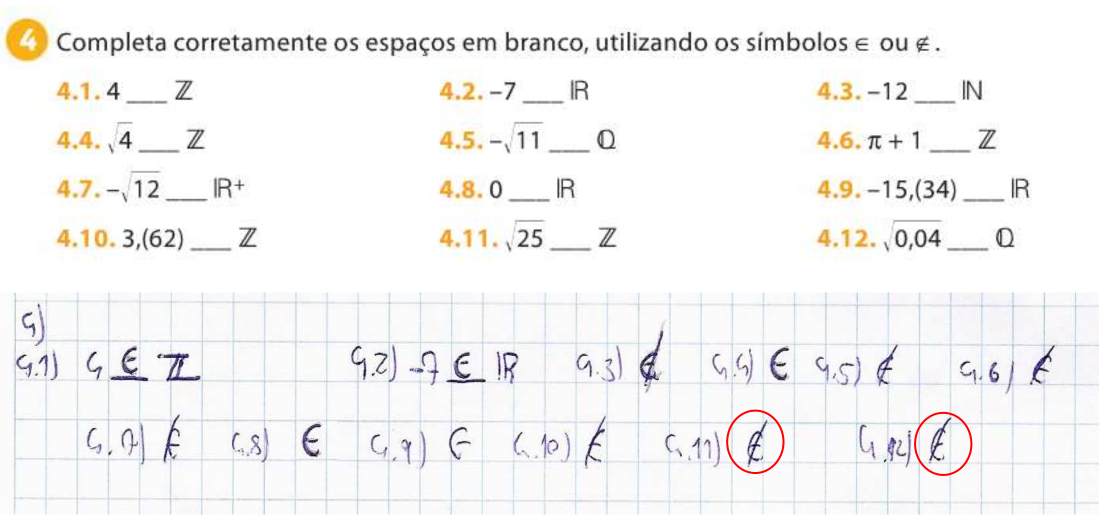


Figura 17 – Enunciado da questão 4 (do manual) e resposta do grupo do Rui

Na questão 5 (Anexo 3, p. 140) pedia-se aos alunos que do conjunto de números apresentado, indicassem aqueles que “corresponde a uma dízima infinita periódica e a um número irracional”. Todos os alunos responderam corretamente a esta questão. No entanto, repare-se que o grupo da Clara evidenciou alguma hesitação na identificação do número “correspondente a uma dízima infinita periódica”:

> **Clara:** Não existe nenhuma dízima infinita periódica! O π não é [uma dízima infinita periódica].
>
> **Rodrigo:** É $\sqrt{16}$ [a dízima infinita periódica].
>
> **Clara:** Não, não é. Olha lá, $\sqrt{16}$ é 4 é [uma dízima] finita!
>
> **Rodrigo:** Então não existe [uma dízima infinita periódica] porque -3 a dividir por 7 não é [dízima] periódica é 0,428 571429. Nunca se repete.

Ao fim de algum tempo, a Clara e o Rodrigo recordaram-se, sem necessidade de intervenção, que aquilo que a máquina faz é um arredondamento da última casa decimal, e concluíram que o número representado na forma de fração correspondia à dízima infinita periódica pedida.

À semelhança do que os alunos já tinham feito na questão 1.1 (da tarefa “Descoberta de um novo conjunto”) a questão 8 (Anexo3, p.140) pedia que classificassem os números apresentados “como racionais ou irracionais, supondo que se mantém a regularidade na parte decimal”. Nesta questão os três grupos em estudo responderam corretamente e solicitei a dois deles, ao da Íris e ao do Rui, que me explicassem como é que a partir da representação dada dos números procederam à sua classificação. No excerto que se segue o grupo da Íris classificou os números apresentados sem dificuldade:

Professora: Já terminaram? Podem explicar-me como procederam à classificação destes números [refiro-me aos exemplos da questão 8]?

Júlia: Sim. Na 8 [questão 8] 0,232323… é [um número] racional.

Professora: Porque...

Júlia: Porque é uma dízima infinita periódica.

Íris: E o período é 23.

Professora: E este aqui [7,1234567891011…] é racional ou irracional?

Júlia: É irracional, porque tem uma sequência [refere-se aos dígitos da dízima] que vai crescendo e nunca se repete. Os números vão mudando. É uma dízima infinita não periódica. Este aqui (na 8.3) também é irracional, porque os números [dígitos da dízima] vão mudando, nunca se repetem.

Íris: O 8.4 [o número] é irracional porque vai-se repetindo.

Professora: É irracional? Ou racional?

[As alunas reparam melhor no número 34,576 857 685 768. A Júlia diz baixinho 5768, 5768]

Íris e Júlia: É racional!

À semelhança dos questionamentos que fiz ao grupo anterior, pedi ao grupo do Rui que me explicasse como é que tinha classificado cada um dos exemplos da questão 8. Segue-se o excerto do diálogo com o grupo:

Professora: Expliquem-me lá como pensaram neste aqui, no 8.

Custódio: Então este aqui [0,23 23 23…] é racional porque o 23 repete. Este aqui [7,12345678…] não é [racional] porque não há nenhuma repetição.

Professora: Ok e mais?

Custódio: Este aqui [13,141 441 444 144 44…] é tudo diferente, é irracional.

Professora: E como é que têm a garantia que estes 4 nunca se repetem?

Gaspar: Não, stora porque esta 1414 41...

Custódio: Stora até dá para lhe dizer mais uma coisa, é 14, 144, 1444, 14444... agora ia ser 1 e depois cinco 4.

Professora: Bom raciocínio.

Custódio e Gaspar: E este aqui 34,576 857 685 768…também não tem repetição.

Professora: Rui concordas que não tem repetição?

Rui: Tem repetição.

Professora: Então que tipo de número é este?

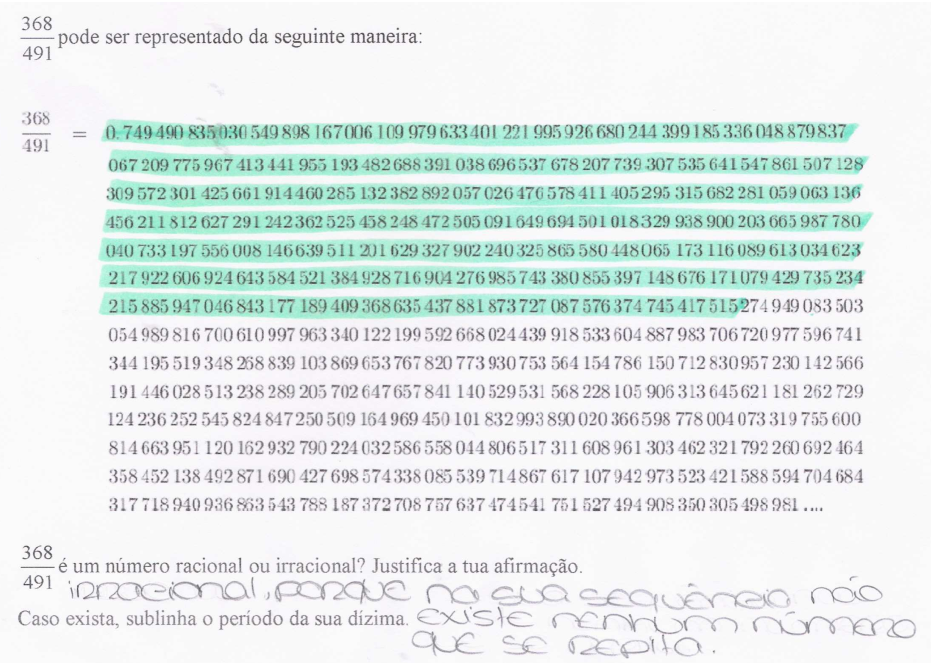
Custódio: É racional [os alunos riscam e corrigem a última alínea].

Nestes excertos, ambos os grupos classificaram corretamente todos os números, apresentando argumentos válidos. No entanto, repare-se que o grupo do Rui apresentou uma justificação mais completa da irracionalidade do número 13,14144144414444… ao reparar que na dízima não há possibilidade de existência de período, visto que percebeu que o número de 4, entre cada dois 1, nunca se repete. Verifico ainda que nestes dois grupos (Íris e Rui), os alunos consideraram numa primeira observação, o número 34,576857685 768… como sendo irracional, sem dar conta da repetição de 5768, mas com uma chamada simples de atenção repararam logo no erro e alteraram a sua resposta.

Na aula em que se trabalhou estas tarefas, os grupos da Íris e do Rui, que tinham terminado mais cedo do que o previsto, pediram-me para irem adiantando o trabalho de casa da tarefa "Dízima" (Anexo 3, p.141). Nesta tarefa perante o número $\frac{368}{491}$ representado na forma de dízima, questionava-se se este se tratava de um número racional ou irracional e pedia-se aos alunos que sublinhassem o período da dízima, caso este existisse.

Passado pouco tempo as alunas do grupo da Íris chamaram-me, dizendo: "*Já resolvemos, é irracional*". Questionei-as "*porquê?*", e a Júlia respondeu-me "*veja stora, não há nenhum número ou série de números que se repita*". Como a tarefa era para trabalho de casa disse-lhes para pensarem melhor e observarem com atenção o número. Num outro canto da sala o grupo do Rui chamou-me com entusiasmo dizendo: *"Professora descobrimos! É racional!"*. Ao questionar para o porquê, responderam-me *"é fácil, é o quociente entre dois números inteiros só pode ser racional"*. Não validei de imediato a resposta dos alunos, deixando a discussão para a outra aula.

Na aula seguinte, o grupo da Íris, que manteve a sua resposta nesta tarefa, argumentou que a dízima infinita apresentada era *"irracional porque na sequência não existe nenhum número que se repita"*. Quando pedi a validação desta afirmação ao grupo-turma, o Gaspar argumentou que o número em questão não era irracional, uma vez que a dízima era periódica e foi ao quadro assinalar o período. Após esta intervenção, o grupo da Íris sublinhou o período da dízima, tal como se pode ver na figura 18, apresentando a seguinte resposta:



$\frac{368}{491}$ pode ser representado da seguinte maneira:

$\frac{368}{491}$ = 0. 749 490 835 030 549 898 167 006 109 979 633 401 221 995 926 680 244 399 185 336 048 879 837
067 209 775 967 413 441 955 193 482 688 391 038 696 537 678 207 739 307 535 641 547 861 507 128
309 572 301 425 661 914 460 285 132 382 892 057 026 476 578 411 405 295 315 682 281 059 063 136
456 211 812 627 291 242 362 525 458 248 472 505 091 649 694 501 018 329 938 900 203 665 987 780
040 733 197 556 008 146 639 511 201 629 327 902 240 325 865 580 448 065 173 116 089 613 034 623
217 922 606 924 643 584 521 384 928 716 904 276 985 743 380 855 397 148 676 171 079 429 735 234
215 885 947 046 843 177 189 409 368 635 437 881 873 727 087 576 374 745 417 515 274 949 083 503
054 989 816 700 610 997 963 340 122 199 592 668 024 439 918 533 604 887 983 706 720 977 596 741
344 195 519 348 268 839 103 869 653 767 820 773 930 753 564 154 786 150 712 830 957 230 142 566
191 446 028 513 238 289 205 702 647 657 841 140 529 531 568 228 105 906 313 645 621 181 262 729
124 236 252 545 824 847 250 509 164 969 450 101 832 993 890 020 366 598 778 004 073 319 755 600
814 663 951 120 162 932 790 224 032 586 558 044 806 517 311 608 961 303 462 321 792 260 692 464
358 452 138 492 871 690 427 698 574 338 085 539 714 867 617 107 942 973 523 421 588 594 704 684
317 718 940 936 863 543 788 187 372 708 757 637 474 541 751 527 494 908 350 305 498 981 ....

$\frac{368}{491}$ é um número racional ou irracional? Justifica a tua afirmação.
irracional, porque na sua sequência não
Caso exista, sublinha o período da sua dízima. existe nenhum número
que se repita.

Figura 18 – Resposta do grupo da Íris à tarefa "Dízima"

Repare-se na figura 18 que, as alunas para se referirem aos dígitos da dízima utilizaram a palavra "sequência" e acrescento que só sublinharam o período da dízima depois da intervenção do Gaspar. No entanto, é minha convição que as alunas, do grupo da Íris ficaram convencidas que a dízima infinita era periódica e reforçaram a sua aprendizagem de que, o quociente entre dois números inteiros é sempre um número racional, e ainda que a máquina de calcular nem sempre permite decidir a irracionalidade de um número.

Dois meses após a lecionação da unidade, no teste do dia 13 de Maio, na questão 5 (Anexo 5, p.149) pedia-se aos alunos “três números irracionais que pertençam ao conjunto $\{x \in R : -2 < x < 1\}$”. As respostas de alguns alunos (Íris, Júlia, Rodrigo e Custódio) dos três grupos de trabalho que estudei mais aprofundadamente surpreenderam-me pela negativa, porque durante as aulas, estes alunos de uma maneira geral tiveram um bom desempenho em todas as tarefas que realizaram sobre esta matéria.

A Íris e o Rodrigo deram como exemplos de números irracionais, números representados na forma de fração, enquanto que o Custódio e a Júlia apresentaram como exemplos de números irracionais, dízimas finitas. Eis as respostas da Íris e do Custódio:

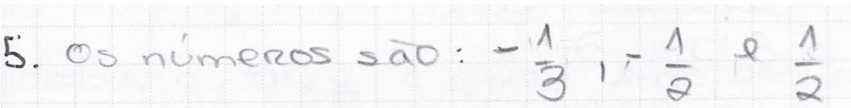


Figura 19 – Resposta da Íris à questão 5 do teste de 13 de Maio

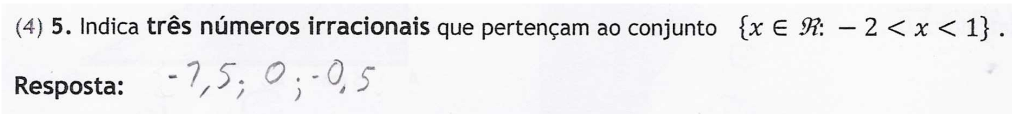


Figura 20 – Resposta do Custódio à questão 5 do teste de 13 de Maio

Para procurar compreender o porquê destes alunos terem cometido este tipo de erros, perguntei individualmente a cada um deles: *“O que é um número irracional?”*e *“O que é um número racional?”*. Apresento de seguida as suas respostas:

Quadro III – “Racional ou irracional?”, respostas dos alunos

	O que é número racional?	**O que é número irracional?**
Íris	*“são as dízimas infinitas periódicas e as dízimas finitas”.*	*“é um número que não é inteiro e* [a dízima] *não é infinita periódica”.*
Custódio	*“são as dízimas infinitas periódicas e os números inteiros”*	*"é um número que não é inteiro" e* [a dízima] *não é infinita periódica"*
Júlia	*“são os números inteiros”*	*“são as dízimas infinitas”*
Rodrigo	*“são os que não têm as dízimas”*	*“é um número que não é inteiro”.*

Conforme se pode observar no quadro III apenas a Íris responde corretamente às duas questões que coloquei. Ao questioná-la para o motivo porque errou, respondeu-me que leu mal o enunciado, pensando que o que estava a ser pedido se referia aos números racionais. Repare-se que o Custódio dizer o que é um número racional não refere as dízimas finitas. A Júlia, pelo seu lado, considera como números racionais apenas os números inteiros e os irracionais como sendo dízimas infinitas. Nas respostas a ambas a questões, o Rodrigo referiu já não se lembrar bem das definições deste tipo de números. A este aluno coloquei-lhe ainda a seguinte questão: *"um número representado sob a forma de fração é racional ou irracional?"* e respondeu-me *"penso que pode ser racional ou irracional"*. Ao pedir-lhe que justificasse a sua resposta o Rodrigo referiu que achava que existiam alguns casos particulares de frações entre números inteiros que pudessem ser números irracionais.

Repare-se que alguns alunos evidenciam alguma confusão na distinção de números racionais e números, quando por exemplo, em relação aos números irracionais referem que basta que as dízimas sejam infinitas. Esta afirmação pode querer dizer que esses alunos ainda não distinguem bem os números racionais de irracionais e que não sabem que o facto da dízima ser periódica ou não, tem importância nessa distinção. Observam-se ainda outros casos, em que os alunos referem que basta que o número não seja inteiro, para que seja um número irracional e que basta que ele seja inteiro para que seja racional. Para além disso, reparo que ainda há alunos que ainda põe a hipótese de um número representado na forma de fração com numerador e denominador inteiros poder ser irracional.

4.2 Representação de números reais na reta real

A principal intenção da realização da tarefa "Espiral" (Anexo 3, p.142) foi fazer com que os alunos, na tarefa seguinte conseguissem proceder à marcação exata na reta real de números irracionais que se apresentam na forma de um radical. Sucede que, apesar de na tarefa "Espiral" todos os grupos de trabalho terem determinado corretamente as medidas das hipotenusas recorrendo ao teorema de Pitágoras, na tarefa "Reta real" (Anexo 3, p.142) a maioria dos alunos evidenciou dificuldades em estabelecer conexões com o que tinham realizado na tarefa anterior.

Na tarefa "Espiral" pedia-se aos alunos que indicassem a medida de cada um dos segmentos (na figura 21, à esquerda) e identificassem aqueles cuja medida é um número irracional. Na figura 21 (à direita) pode-se observar que na tarefa "Espiral", o grupo do

Hugo realiza os cálculos para determinar as medidas das hipotenusas até àquela que mede duas unidades. A partir desse instante, o grupo do Hugo aparenta perceber o processo de raciocínio envolvido, ao considerar a medida das hipotenusas seguintes como sendo a raiz quadrada da soma de uma unidade com o quadrado do cateto do triângulo anterior. Também ao grupo do Rui, lhe bastou fazer o cálculo das três primeiras hipotenusas da espiral $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{4}$.

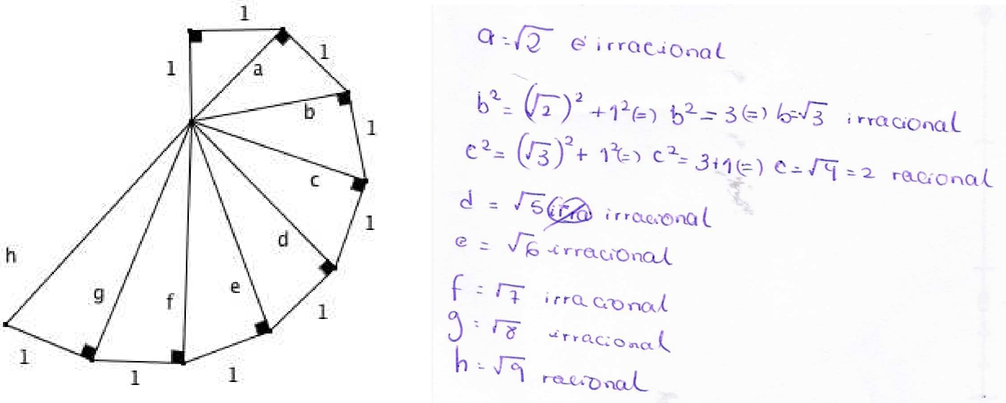


Figura 21 – Ilustração do enunciado da tarefa "Espiral" (à esquerda) e resposta do grupo do Hugo (à direita)

No grupo Íris (na figura 22) à semelhança do grupo da Clara, as alunas procederam ao cálculo de todas as medidas das hipotenusas e identificaram sem dificuldade, aqueles cuja medida é um número irracional.

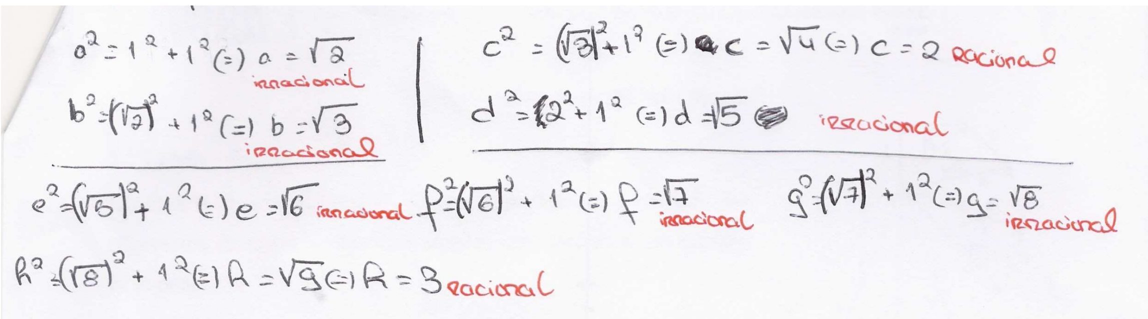


Figura 22 – Resposta do grupo da Íris à tarefa "Espiral"

Na questão 2.2 da tarefa "Reta real" (Anexo 3, p. 142) pedia-se aos alunos que assinalassem na reta real os valores dos pontos: $\frac{1}{3}, \frac{7}{3}$, $-\frac{25}{50}, \sqrt{16}$, $-\sqrt{\frac{1}{16}}$, $-1-\sqrt{2}$, $2+\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ e que ordenassem os números representados, podendo usar a calculadora. A marcação de $\sqrt{2}$ na reta real foi exemplificada no quadro e os alunos realizaram-na sem grande dificuldade, compreendendo que cada um dos catetos teria de medir uma unidade. No entanto, para assinalarem na reta os números dados na questão 2.2, a Júlia e o Hugo demoraram algum tempo para compreender que tinham de construir um triângulo retângulo, para proceder à marcação de $\sqrt{5}$. Eis um pequeno excerto do diálogo com o grupo da Íris a este propósito:

Íris: Para fazeres a raiz [quadrada] de 5, fazes um triângulo, aqui vale 1 e aqui é 2.

Júlia: Não estou a perceber. Professora pode-me explicar?

Professora: Então o que é que nós vimos na tarefa da espiral? Quanto é que tinha que medir este cateto aqui para que o comprimento da hipotenusa medisse raiz de 5?

Júlia: 2. Mas porque é que é um triângulo? Porque é que não posso marcar 2,23?

Professora: Os triângulos retângulos ajudam a fazer a marcação exata de números irracionais na reta real.

Íris: Júlia isto dos triângulos é só para as raízes quadradas.

(Reparo que alguns alunos, como é o caso da Júlia, continuam a estar muito agarrados à representação aproximada dos números).

Na figura 23, relativa a alguns cálculos auxiliares da questão 2.2, vê-se que o grupo do Hugo construiu corretamente o triângulo usando o teorema de Pitágoras, mas provavelmente por lapso, enganou-se nos cálculos. Este engano pode ter sido uma distração, em que o grupo ao passar da construção do triângulo para a realização dos cálculos elevou 5 ao quadrado, elevou 1 ao quadrado e por lapso elevou 2 ao quadrado repetidamente, duas vezes. Outra possível interpretação é a de que, para que a soma do quadrado dos catetos desse 5, o grupo pode ter pensado que teria de somar a uma unidade quatro e elevou, por lapso, ambos os números ao quadrado. Na sua resolução, percebe-se que o grupo do Hugo tem a noção do teorema de Pitágoras e que aplica bem a sequência da "Espiral".

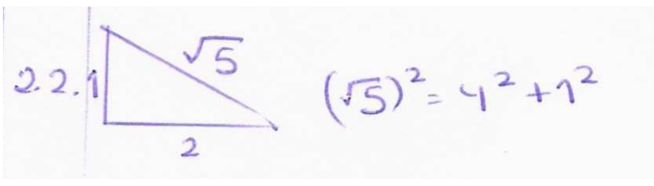


Figura 23 – Cálculos auxiliares do grupo do Hugo na questão 2.2 da tarefa "Reta real"

Em contrapartida, no grupo do Rui, os alunos evidenciaram ter uma boa compreensão do que foi solicitado, estabelecendo com facilidade conexão com a tarefa "Espiral". Na resolução da questão 2.2, apenas este grupo conseguiu assinalar todos os números solicitados com facilidade e proceder à ordenação dos mesmos. No entanto, verifica-se (na figura 24) que houve alguns erros de distração relativamente aos sinais de alguns números negativos (por exemplo $-\sqrt{\frac{1}{16}}$ e $-\frac{1}{25}$) que foram representados como sendo positivos. Embora se esqueçam do sinal destes números, os alunos evidenciam na resposta apresentada na figura seguinte, saber localizar os números na reta real e ordená-los corretamente:

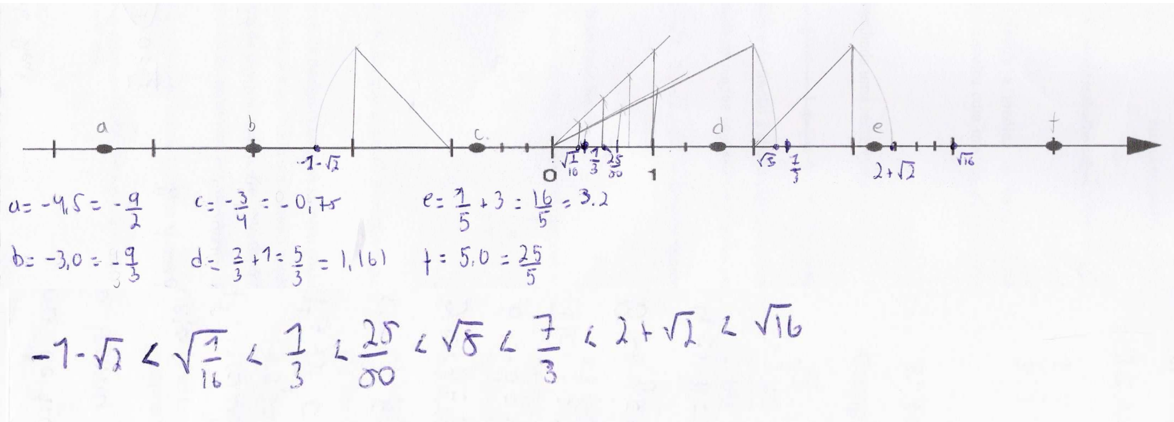


Figura 24 – Resposta do grupo do Rui à questão 2.2 da tarefa "Reta real"

No grupo da Clara, os alunos assinalaram todos os números corretamente, ficando a faltar apenas a marcação do número $-\sqrt{\frac{1}{16}}$. Este grupo teve inicialmente dificuldade em proceder à marcação correta de 1/3, sendo esta percetível pela seguinte afirmação da Clara: *"Eu marquei $\frac{1}{3}$ assim, dividi da forma mais simples. Dividi a unidade, 2,4 cm por 3 com a máquina de calcular e deu 0,8"*. Observo que a Clara começou por medir com a régua a unidade na reta real, que correspondia a 2,4 cm e dividiu-a depois em 3 partes. Nos grupos da Íris e do Hugo, os alunos também não sabiam como proceder à marcação do número racional 1/3, pelo que solicitei a um voluntário que fosse ao quadro representá-lo na reta real. O Mário procedeu à sua marcação com facilidade (com auxílio de uma régua e de um compasso), traçando posteriormente paralelas com auxílio de um esquadro como mostra a figura 25.

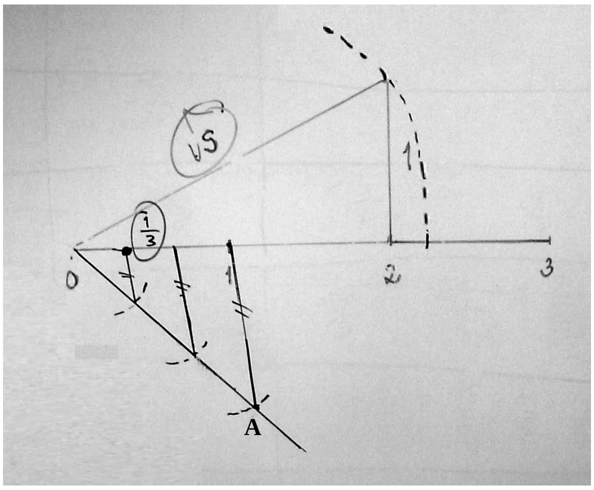


Figura 25 - Marcação feita pelo Mário de alguns números da questão 2.2 da tarefa "Reta real" (fotografia do quadro)

Nesta figura vê-se ainda a construção relativa à marcação de $\sqrt{5}$ na reta real, que também pedi para ser feita, pois apercebi-me que vários alunos não a tinham conseguido realizar. Ainda assim, após o Mário proceder à marcação destes números, os grupos da Clara e da Íris solicitaram a minha intervenção dizendo:

Clara: Stora pode-me explicar como se faz a marcação de 1/3?

Professora: Clara e Íris? Como é que o vosso colega procedeu aqui [na marcação de 1/3]? Traçou uma reta qualquer, e colocou aqui [na origem, no ponto 0] a ponta seca do compasso e abriu até onde?

Mário: Ao calhas!

Professora: Manteve esta medida da abertura do compasso. Não interessa qual é a medida, interessa que a medida se mantém. A partir deste ponto [ponto A] uniu até ao ponto 1. E a partir daí foi traçando paralelas para cada uma das marcações. Esta é paralela a esta, que é paralela a esta.

Clara: Ok. Já percebi.

Júlia: Percebeste Íris? Explica-me.

Íris: Sim. Fizemos isto a Educação Visual, eu já não me lembrava. Tens de marcar com o compasso, manténs a abertura e depois é só traçar paralelas.

Na figura 26 apresenta-se a resolução da questão 2.2, feita pelo grupo da Íris. Pode-se observar que as alunas procedem corretamente à marcação dos números reais $-1-\sqrt{2}$, $-\frac{25}{50}$, $\frac{1}{3}$, $\sqrt{5}$ e $\sqrt{16}$ e incorretamente à marcação de $-\sqrt{\frac{1}{16}}$, ao representá-lo na reta como o ponto -4,5. Visto que as alunas sabiam que $\sqrt{16}$ é 4, deviam também ter compreendido que $-\sqrt{\frac{1}{16}}$ é $-\frac{1}{4}$. Embora na resolução do grupo da Íris tenha ficado a faltar a marcação dos números $\frac{7}{3}$ e $2+\sqrt{2}$, o facto de terem assinalado na reta os números $\frac{5}{3}$ e $-1-\sqrt{2}$, leva-me a crer que a marcação dos números em falta não constituiria uma dificuldade.

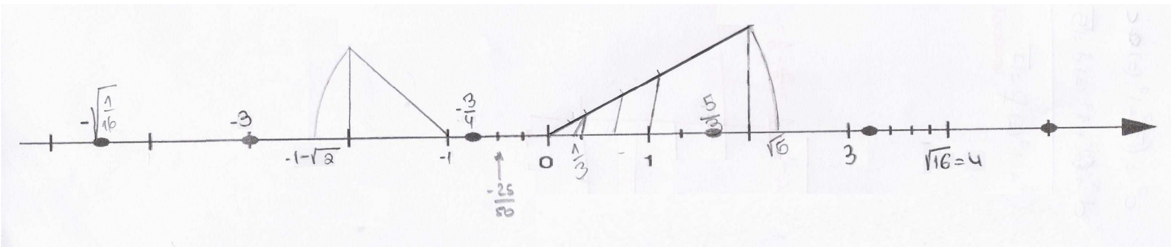


Figura 26 – Resposta do grupo da Íris à questão 2.2 da tarefa "Reta real"

No teste realizado no dia 4 de Março solicitava-se na questão 9 (Anexo 4, p. 149) o seguinte: "desenha uma reta cuja unidade seja 4cm. Nela marca, rigorosamente, os pontos de abcissa: $1+\sqrt{3}$ e $-2-\frac{1}{3}$". Dos três grupos estudados em aula, responderam acertadamente à marcação de ambos os números os alunos: Íris, Júlia, Rui, Gaspar e Clara. No entanto, o Rodrigo e o Custódio evidenciaram algumas dificuldades. O Custódio assinalou o número racional $-2-\frac{1}{3}$ corretamente na reta real mas evidenciou ter algumas dificuldades na marcação de $1+\sqrt{3}$, visto que determinou $\sqrt{3}$ a partir da construção de um triângulo retângulo cujos catetos mediam duas e uma unidade (analogamente à marcação feita pelo Rodrigo). O Rodrigo errou a marcação de ambos os números. Reparo que para proceder à marcação de $-2-\frac{1}{3}$, o aluno dividiu a unidade em 4 partes em vez de a dividir em 3 (figura 27).

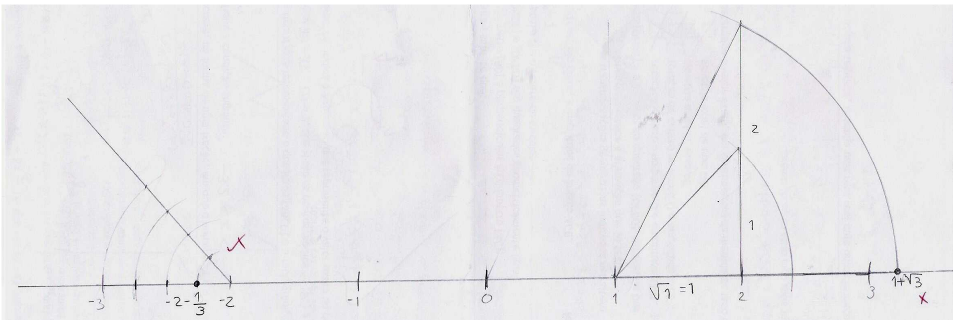


Figura 27 – Resposta do Rodrigo à questão 9 do teste de 4 de Março

Relativamente à marcação do número irracional, o Rodrigo à semelhança de outros alunos que erraram esta marcação, embora evidencie que sabe determinar a medida $\sqrt{2}$ (pela marcação de $1+\sqrt{2}$) na figura 22, não aplica corretamente o teorema de Pitágoras na determinação de $\sqrt{3}$. Para assinalar $1+\sqrt{3}$ na reta real o aluno considerou na construção do triângulo um dos catetos uma unidade e o outro medindo duas unidades, em vez de $\sqrt{2}$.

4.3 Comparação de números reais

A comparação e a ordenação dos números reais podem ser solicitadas aos alunos tendo por base a análise de diferentes representações, podendo ser feita de duas formas: ou recorrendo à reta real ou à comparação direta entre os números apresentados na sua forma decimal ou fracionária. A análise das produções escritas evidencia que a comparação e a ordenação dos números reais são tarefas simples quando se recorre à representação na reta real. Como se pôde observar anteriormente na resolução do grupo do Rui à questão 2.2 da tarefa "Reta real", embora os alunos tenham errado a representação dos números negativos $-\frac{25}{50}$ e $-\sqrt{\frac{1}{16}}$ na reta real, procederam corretamente à ordenação dos números apresentados. A maioria dos alunos não teve dificuldades em ordenar os números, conforme se mostra na figura 28. O processo de ordenação usado por Gaspar facilmente se compreende com a seguinte afirmação: "*Então, pus os números na reta real e depois foi só ver como é que eles estavam por ordem*".

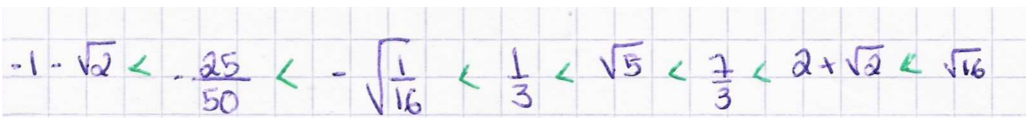


Figura 28 – Resposta do Mário à ordenação dos números da questão 2.2 da tarefa "Reta real"

Na comparação feita partindo da representação decimal ou fracionária dos números tendem a surgir diversas dificuldades. Na figura seguinte encontram-se assinalados os erros que ocorreram com mais frequência na turma:

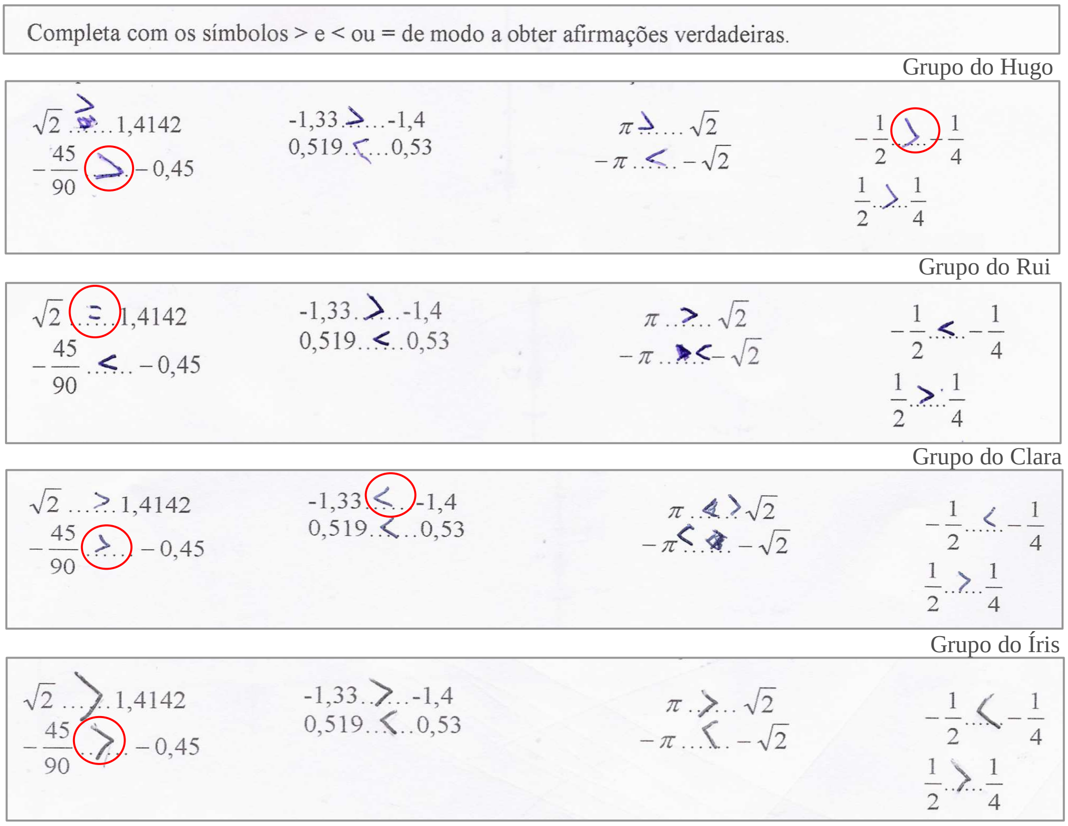


Figura 29 – Enunciado da tarefa “Comparação e ordenação de números reais” e respostas dos grupos do Hugo, do Rui, da Clara e da Íris

Na tarefa “Comparação e ordenação de números reais” (Anexo 3, p. 142) verifica-se que cerca de metade da turma cometeu o erro de considerar que $\sqrt{2}$ era 1,4142. No momento de trabalho autónomo dos alunos, procurei compreender junto do grupo do Hugo como procederam para comparar números. Os alunos referiram então que os números eram iguais porque ao compararem a dízima 1,4142 com aquilo que lhes deu na máquina de calcular o radical $\sqrt{2}$, verificaram que os primeiros algarismos das dízimas eram iguais. No sentido de apoiar o pensamento dos alunos, chamei-os a atenção que deviam comparar as casas decimais de ambos os números. O grupo procedeu de novo à comparação, corrigindo a sua resposta ao colocar que $\sqrt{2}$ era maior que 1,4142, como se mostra na primeira resolução da figura 29. Na turma houve mais dois grupos que cometerem o mesmo erro, como é o caso do grupo do Rui.

O facto do número racional representado por 1,4142 ter sido inadequadamente identificado como $\sqrt{2}$, deve-se possivelmente ao uso de aproximações, com recurso à calculadora. Deste modo, alguns alunos podem ser levados a pensar que uma dízima infinita e o seu valor aproximado representam o mesmo número. Ao solicitar a justificação desta questão no grupo da Íris, a Júlia afirmou: "*este número (1,4142) acaba aqui e este* $\sqrt{2}$ *continua, por isso o* $\sqrt{2}$ *é maior do que 1,4142*". Embora neste caso, a comparação destes dois números esteja correta, é preciso ter em atenção este tipo de justificação, visto que um número representado por uma dízima infinita não é sempre superior a um número representado por uma dízima finita.

Na comparação dos números representados na forma de fração apenas o grupo do Hugo evidenciou dificuldades ao indicar que "$-\frac{1}{2} > -\frac{1}{4}$". No que respeita às respostas dos grupos da Íris e da Clara, os alunos cometem o mesmo erro na comparação entre $-0{,}5$ e $-0{,}45$ (na figura 29), talvez por terem procedido à comparação das dízimas como se estivessem a trabalhar com números positivos, esquecendo-se do sinal. Na comparação de -1,33 com -1,4 o grupo da Clara volta a errar, ao considerar que -1,33 é inferior a -1.4. Relativamente aos restantes números representados na forma de fração (na figura 24) os quatro grupos não tiveram dúvidas, procedendo à sua comparação corretamente.

A tarefa "π" (Anexo 3, p. 145) apresentada na figura 30 teve como principal objetivo estabelecer a ponte entre a representação e comparação dos números reais e os valores aproximados.

1 Ao longo dos tempos foram utilizadas diferentes aproximações para o valor de π (pi). Na tabela estão indicados alguns desses valores.

Egípcios	Gregos	Hindus	Romanos
$\frac{256}{81}$	$\frac{22}{7}$	$\sqrt{10}$	$3+\frac{1}{8}$

a) Que povo utilizava uma melhor aproximação do valor de π?

b) Ordena (por ordem crescente) os cinco números apresentados e explica como procedeste.

$\frac{256}{81}, \frac{22}{7}, \sqrt{10}, 3+\frac{1}{8}, \pi.$

c) Que povo utilizava a pior aproximação?

d) Identifica as aproximações por excesso e as aproximações por defeito, do valor de π.

Figura 30 – Enunciado da tarefa "π"

De todas as tarefas apresentadas, esta foi provavelmente aquela em que os alunos estiveram mais entusiasmados, possivelmente por se trabalharem as várias aproximações que historicamente os povos fizeram do próprio número π e por a tarefa ser bastante acessível para a generalidade da turma. Todos os alunos acertaram a primeira alínea, concluindo de imediato que o povo grego era o que tinha a melhor aproximação, porque "*$\frac{22}{7}$ dá um valor muito perto de π e é o valor que mais se aproxima do valor de π*", disse o Rui. Na figura seguinte apresento a resposta do grupo do Rui:

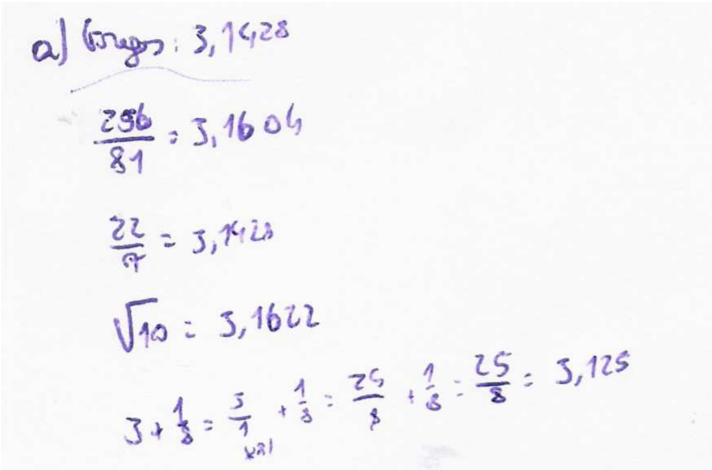


Figura 31 – Resposta do grupo do Rui à alinea a) da tarefa "π"

Na segunda alínea, os grupos determinaram cada um dos números na sua representação decimal, com o auxílio da calculadora. Todos os grupos em estudo procederam corretamente à comparação dos algarismos da parte decimal de cada uma das dízimas obtidas na calculadora. No entanto, no grupo da Clara surgiram inicialmente algumas dificuldades na resolução desta alínea. Eis a resposta deste grupo:

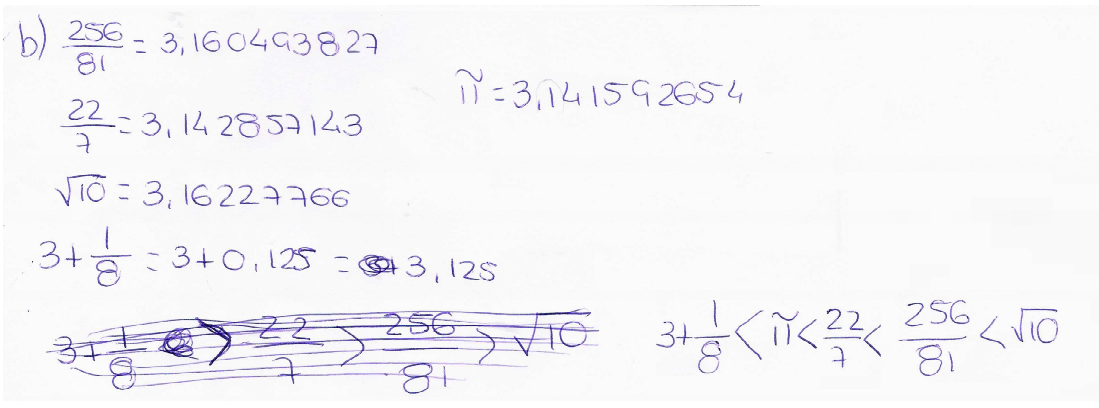


Figura 32 – Resposta do grupo da Clara à alinea b) da tarefa "π"

Durante o trabalho autónomo dos alunos, reparei que o grupo da Clara deu a seguinte resposta "$3+\frac{1}{8}>\frac{22}{7}>\frac{256}{81}>\sqrt{10}$" ao que era pedido na alínea b), pelo que chamei a atenção dos alunos, que o que se pedia no enunciado era por ordem crescente e não decrescente. Apercebi-me mais tarde que a Clara comete frequentemente o mesmo erro relativamente ao uso dos sinais de menor e de maior, confundindo sempre os dois. Para além disso, a aluna revela alguma confusão relativamente à noção de número irracional na justificação que apresenta para a ordenação dos números em questão. Segue-se o diálogo com o grupo:

Professora: É por ordem crescente.

Rodrigo: Do mais pequeno para o maior.

Professora: Não estou a dizer que está errado, mas é por ordem crescente. E o π?

Clara e Rodrigo: Não temos. Há pois é, falta-nos o π.

Professora: Vocês estão a dizer que este [$3+\frac{1}{8}$] é maior que este [$\frac{22}{7}$]? Deixa cá ver…

Clara: Sim stora $3+\frac{1}{8}$ é o maior.

Professora: Este [$3+\frac{1}{8}$] é maior que aquele [$\frac{22}{7}$]?

Clara: Sim este [$3+\frac{1}{8}$] é maior que aquele [$\frac{22}{7}$].

Professora: Como é que viste?

Clara: Porque este 3,125 acaba aqui no 5, é um valor exato e este $3{,}142857....$ é um número irracional.

Professora: É só por causa disso? É essa a vossa justificação?

Clara: Sim.

Rodrigo: Não. Para mim, os símbolos estão ao contrário.

Professora: Então rectifiquem, que eu já venho cá ver.

Clara: Este símbolo é o que? Eu confundo sempre isto tudo. Nunca sei os sinais.

Recordo que, embora nas primeiras tarefas de classificação e identificação dos números racionais e irracionais, a Clara as tenha resolvido corretamente, neste caso revela alguma confusão, ao afirmar que $\frac{22}{7}$ é um número irracional. Relativamente à ordenação dos números a Clara não procede adequadamente à comparação dos algarismos das dízimas correspondentes às aproximações de π (na figura 32) argumentando incorretamente que $3+\frac{1}{8}$ é maior que $\frac{22}{7}$. Por sua vez, o Rodrigo não partilha da mesma argumentação matemática da Clara, compreendendo que o que estava errado eram apenas os sinais. Depois de perceber que a ordenação dos números estava correta, o grupo da Clara corrigiu os sinais (de maior para menor) e acrescentou o número π (que se tinham esquecido) na ordenação (na figura 33).

Na alínea c) reparei por observação direta que uma grande parte dos alunos considerou inicialmente para pior aproximação de π, a do povo romano. Nesta questão o grupo da Clara manteve a sua resposta, conforme se pode observar na figura seguinte:

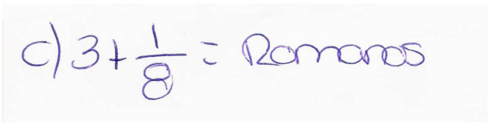


Figura 33 – Resposta do grupo da Clara à alinea c) da tarefa “π”

No momento de trabalho autónomo, questionei este grupo porque é tinha respondido que $3+\frac{1}{8}$ era a pior aproximação, ao que a Clara me respondeu: “porque é o valor mais pequeno, que é inferior a π”. Optei por não corrigir de imediato o grupo, visto que a correção iria ser feita no quadro. Repare-se que a justificação que o grupo da Clara apresenta para a pior aproximação é porque este é “o valor mais pequeno”. No entanto, o valor mais pequeno não corresponde à pior aproximação, visto que $3+\frac{1}{8}$ não é o valor que se afasta mais de π.

Para responder a esta alínea, houve uma grande indecisão entre o povo romano e o povo hindu, em alguns grupos de trabalho, nomeadamente no grupo do Rui. Reparo que este grupo, sentado noutro canto da sala, inicialmente pensou exatamente como o grupo da Clara. Segue-se um pequeno excerto que mostra isto:

Rui: Como é que sabes qual é que é a pior aproximação?

Gaspar: A pior aproximação é os hindus. Ah não, não é nada, é a dos romanos!

Rui: Os romanos são os que têm o valor mais pequeno, por isso é o mais distante π.

Custódio: Olha são os hindus.

Como se pode constatar o grupo do Rui começou por argumentar exatamente como o da Clara, ao justificar que a pior aproximação é a que tem "o valor mais pequeno". Reparo ainda que neste excerto, os alunos revelam alguma confusão, ao pensar que o valor mais pequeno é o mais distante de π. Durante a realização do trabalho autónomo, estes alunos ainda são tentados a ir ver as soluções do manual, mas como não há soluções, resta-lhes usarem a máquina e fazer as diferenças entre os números sobre os quais estão indecisos (os romanos ou os hindus) e π, para tirarem as suas dúvidas:

Gaspar: Espera aí, $\pi - \left(3 + \frac{1}{8}\right)$ [coloca na calculadora].

Custódio: Põe π menos aquilo. Então a que tem maior diferença é os hindus.

Professora: São os hindus, porquê? Como é que justificariam?

Rui: Porque é o valor que mais se distancia de π.

Nesta nova passagem percebe-se que os alunos compreenderam que o valor mais distante de π não é forçosamente o valor mais pequeno. A figura seguinte mostra a resposta do grupo do Rui a esta alínea:

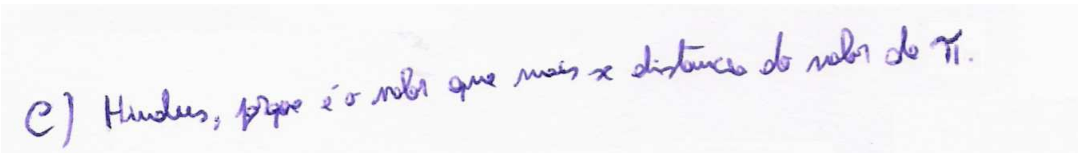


Figura 34 – Resposta do grupo do Rui à alinea c) da tarefa "π"

Nos grupos da Íris e do Hugo, os alunos concluíram facilmente, sem qualquer intervenção, que a pior aproximação seria a dos hindus. Finalmente na última alínea d), todos os grupos identificaram sem dificuldade as aproximações por excesso (os números superiores a π) e por defeito (inferiores a π), o que foi facilitado por já terem procedido à ordenação dos números apresentados numa alínea anterior. Na figura 35 mostro a resposta do grupo da Clara à alínea d) que foi semelhante às dos outros três grupos em estudo:

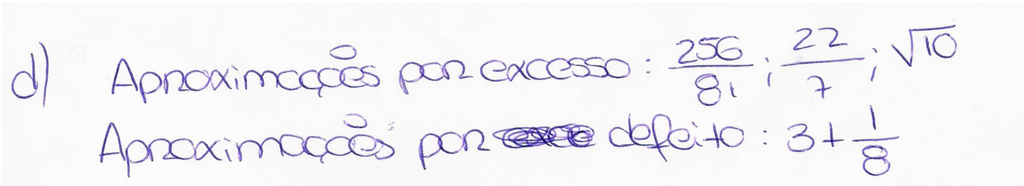


Figura 35 – Resposta do grupo da Clara à alinea d) da tarefa “ π ”

4.4 Intervalos de números reais

4.4.1 Transição entre representações, interseção e reunião de intervalos

Na resolução de tarefas que envolvem a representação dos conjuntos de números reais, procurei fazer com que os alunos representassem sempre em paralelo as seguintes representações: geométrica, na forma de intervalo e em compreensão. No primeiro exercício (Anexo 3, p. 144) pedia-se aos alunos para representarem geometricamente e em compreensão cada um dos seguintes intervalos de números reais: $[2,4]$; $[-2,5[$; $]-\infty,5]$ e $]3,+\infty[$. No momento de trabalho autónomo, a maioria dos alunos demonstrou ter um gosto especial por esta matéria, procedendo corretamente à representação gráfica das bolas fechadas (ou abertas) nos extremos dos intervalos, consoante estes fossem fechados (ou abertos) à direita (à esquerda). Houve no entanto, um erro que surgiu na representação geométrica de intervalos ilimitados à direita (ou à esquerda), em que alguns alunos os representaram-nos como se estes fossem limitados, isto é, indicando com a representação de bola aberta correspondendo a $+\infty$ $(-\infty)$. Na resposta seguinte apresentada pelo grupo do Hugo assinala-se este erro:

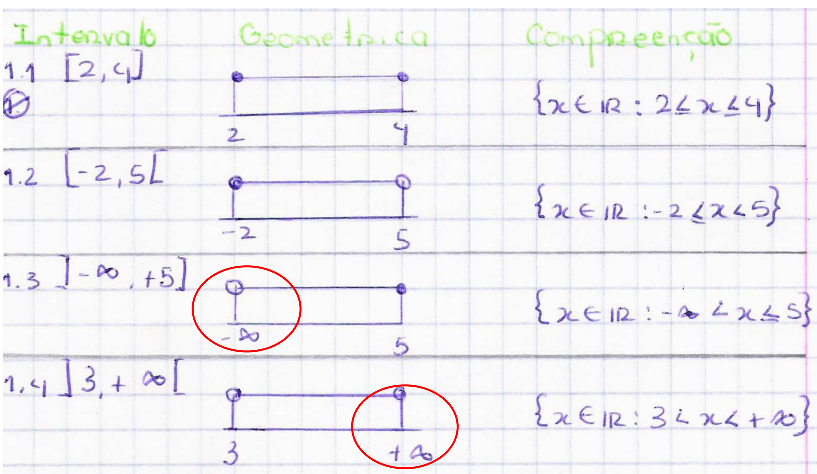


Figura 36 – Resposta do grupo Hugo ao exercício 1 (do manual)

Na tradução da representação geométrica para a representação em compreensão alguns grupos, entre os quais, o do Hugo e o da Clara, representaram desnecessariamente $-\infty < x$ e $x > +\infty$ na escrita das condições $-\infty < x \leq 5$ e $3 < x < +\infty$ (ver figura 36). No entanto, percebe-se pela resposta do grupo do Hugo que os alunos já têm interiorizada a noção de intervalo e que sabem representar os números reais em diversas representações, procedendo de forma adequada ao seu tratamento e conversão.

Um outro erro que surgiu pontualmente, é aquele que se apresenta realçado na figura 37. Na resposta apresentada pelo grupo de Rui percebe-se os alunos não tiveram dificuldade em transitar da representação sob a forma de intervalo para a representação geométrica. No entanto, na tradução da representação geométrica para a representação em compreensão, o grupo evidencia algumas dificuldades salientadas na figura 37. Repare-se que, perante intervalos que são ilimitados à esquerda ou à direita, estes alunos enganam-se na escrita de condições que representam o conjunto de números reais dados na forma de intervalo e graficamente, utilizando o sinal maior que, quando deviam ter utilizado o sinal menor que (na alínea 1.5), e reciprocamente (na alínea 1.6).

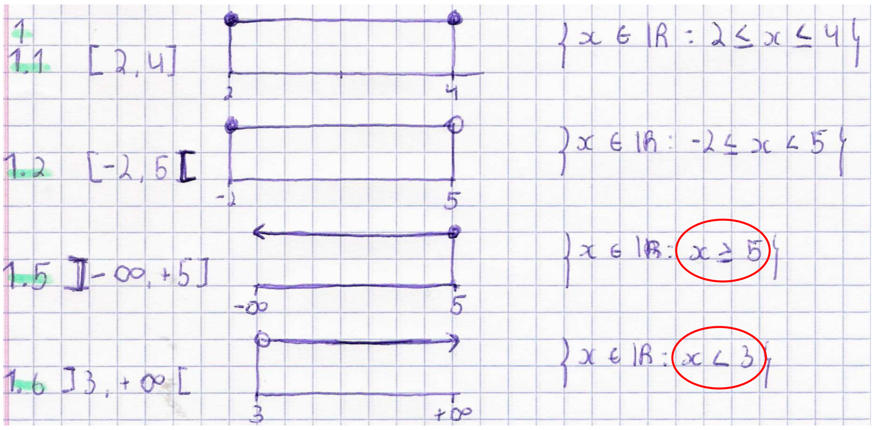


Figura 37 – Resposta do grupo do Rui ao exercício 1 (do manual)

Nos restantes grupos, da Íris e da Clara, os alunos procederam corretamente ao tratamento e conversão das diferentes representações dos conjuntos de números reais apresentados. Na figura 38 apresento a resposta do grupo da Íris:

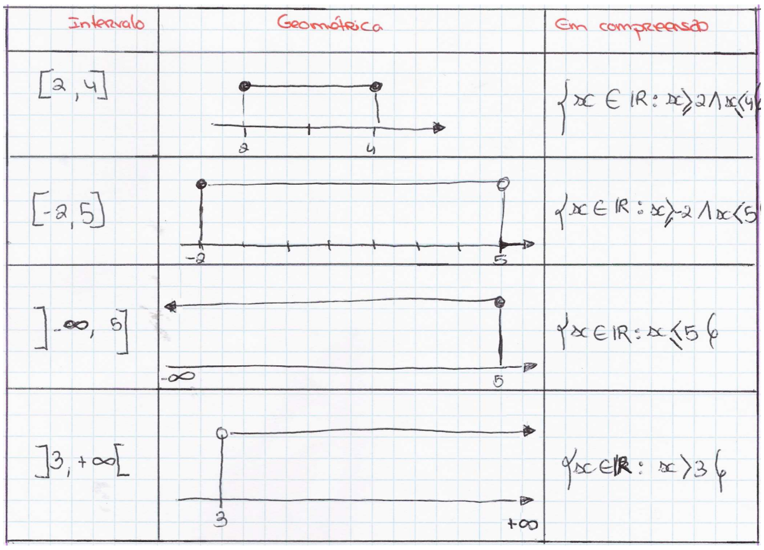


Figura 38 – Resposta do grupo da Íris ao exercício 1 (do manual)

Na questão 8 (Anexo 5, p. 149), do teste do dia 13 de Maio, solicitava-se aos alunos que resolvessem "a inequação $\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{6}\right) \geq 4x+\frac{1}{6}$, representando o conjunto-solução geometricamente e sob a forma de intervalo de números reais". Na realização deste exercício, a Clara resolve corretamente a inequação conforme se mostra na figura seguinte, mas evidencia uma dificuldade na passagem da escrita em compressão para a representação geométrica:

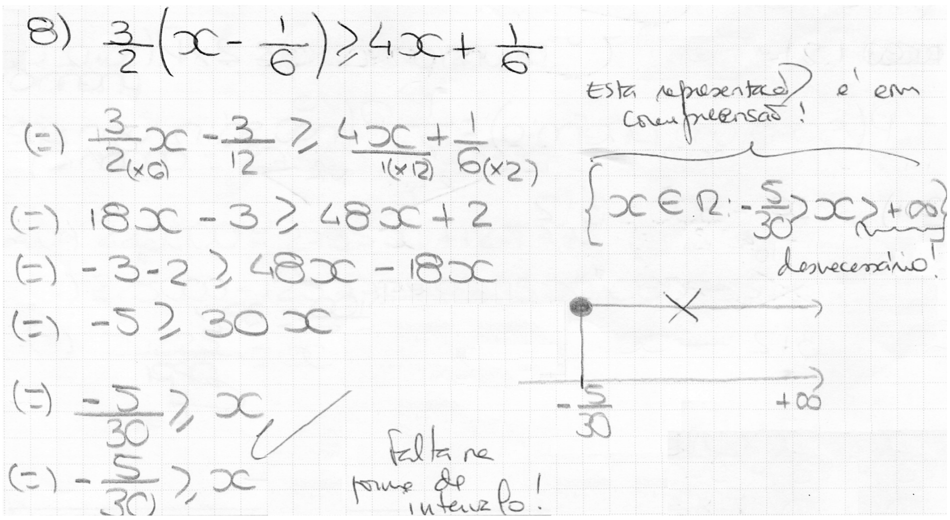


Figura 39 – Resposta da Clara ao exercício 8 do teste do dia 13 de Maio

A Clara conclui corretamente que $-\frac{5}{30} \geq x$, mas ao traduzir esta condição para a representação geométrica, representa graficamente todos os números reais maiores ou iguais a $-\frac{5}{30}$, em vez de representar todos os números reais menores ou iguais a $-\frac{5}{30}$. Este erro deve-se possivelmente ao facto da aluna não ter compreendido que a expressão $-\frac{5}{30} \geq x$ é equivalente a ter $x \leq -\frac{5}{30}$ que por sua vez é equivalente a $x \leq -\frac{1}{6}$. Na sua resposta pode-se observar ainda que na escrita em compreensão a aluna voltou a incluir desnecessariamente $x > +\infty$. No que diz respeito à apresentação do conjunto-solução a aluna referiu que se esqueceu de representar o conjunto-solução na forma de intervalo pedida no enunciado. A resposta apresentada pelo Rodrigo foi semelhante à da Clara, evidenciando as mesmas dificuldades. Por sua vez, houve outros alunos, como é o caso da Júlia e Íris que evidenciaram alguns erros de distração na resolução da inequação. Enquanto que Júlia chegou a um conjunto-solução diferente do esperado, a Íris não resolveu por completo a inequação, não chegando por isso a representar geometricamente e na forma de intervalo o conjunto-solução, tendo dado a seguinte resposta:

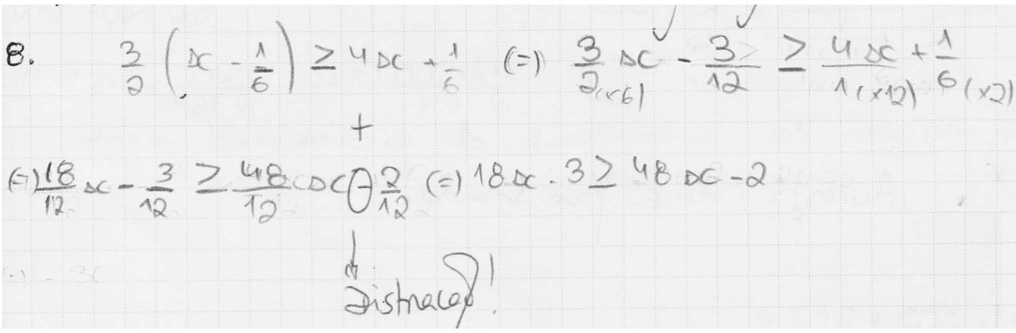


Figura 40 – Resposta da Íris ao exercício 8 do teste do dia 13 de Maio

Dos outros alunos estudados mais aprofundadamente em aula, o Gaspar e o Rui representaram corretamente o conjunto-solução nas representações solicitadas. Por sua vez, o Hugo, o Custódio e a Sónia não responderam a esta questão, deixando-a em branco. No Anexo 5 (p.149) apresento um quadro síntese com as classificações e as respostas dos alunos neste exercício. Nesse quadro pode-se verificar que na turma houve 3 alunos que tiveram a resposta toda certa, 6 alunos quase certa, não houve respostas erradas e 7 alunos não responderam.

No que diz respeito aos exercícios realizados nas aulas, que envolvem a representação gráfica da interseção e reunião de conjuntos dados na forma de intervalos (Anexo 3, p. 144), a maioria dos alunos resolveu-os sem grandes dificuldades. No entanto, o grupo da Íris ao resolver a alínea 1.1, respondeu que a interseção dos conjuntos $A = [2,4]$ e $B =]1,3]$ é $A \cap B = [2,3]$, não considerando que o elemento 3 não pertence a ambos os conjuntos apresentados. Na figura seguinte saliento esta incorreção:

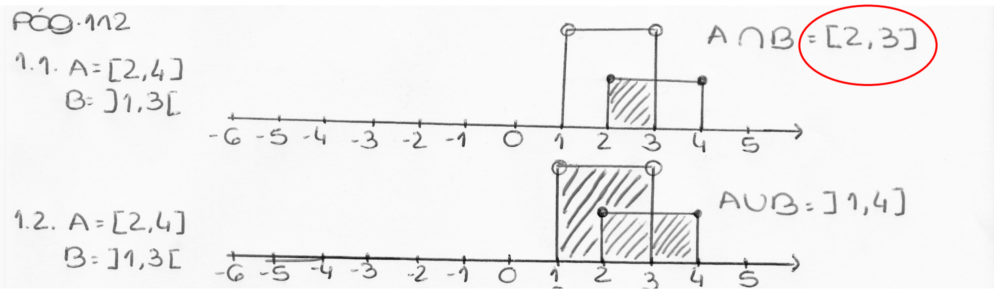


Figura 41 - Resposta do grupo da Íris aos exercícios 1.1 e 1.2 (do manual)

No que diz respeito à reunião dos intervalos, a maioria dos alunos não teve dúvidas, procedendo corretamente às suas representações gráfica e na forma de intervalo. Houve no entanto, na resposta do grupo do Hugo um elemento curioso que se encontra assinalado na figura 42. Como se pode observar nesta figura na representação simbólica da reunião dos intervalos dados, o grupo do Hugo sente a necessidade de explicitar todos os números inteiros existentes entre os extremos do respetivo intervalo. Nos grupos da Clara e do Rui os alunos responderam corretamente a todos os exercícios que envolvem a representação gráfica e simbólica da interseção e reunião de intervalos, não evidenciando qualquer dificuldade.

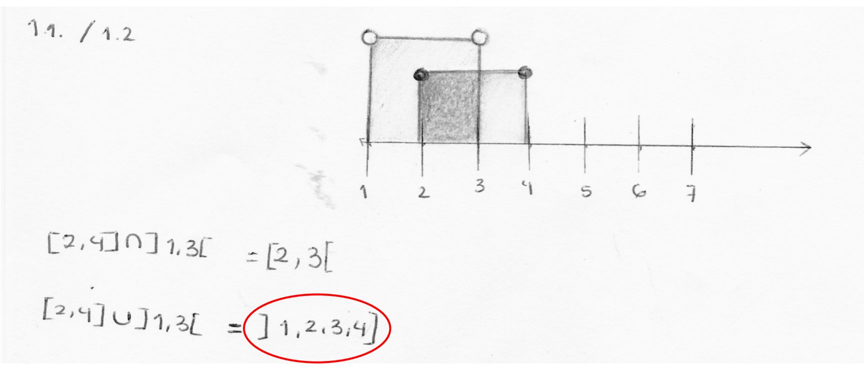


Figura 42 - Resposta do grupo do Hugo aos exercícios 1.1 e 1.2 (do manual)

4.4.2 Resolução de problemas sobre intervalos de números reais

Na tarefa "Perímetro do triângulo" (Anexo 3, p.145) pedia-se aos alunos que apresentassem na forma de intervalo de números reais os valores de x para os quais o perímetro do triângulo (cujos lados medem 18 cm, 12 cm e x cm) é inferior a 40cm. Esta tarefa aparentemente simples, por trabalhar com o conceito de perímetro, estabelece uma ponte do tópico dos Números reais com a Geometria e a Álgebra, permitindo aos alunos estabelecer conexões com propriedades e noções aprendidas em anos anteriores. A resolução deste tipo de problema permite ao professor percecionar os processos de raciocínio dos alunos.

Inicialmente a maioria dos grupos concluiu que os valores de x para os quais o perímetro é inferir a 40 situavam-se no intervalo $]0,10[$ não tendo aplicado a propriedade da desigualdade triangular aprendida em anos anteriores. Veja-se por exemplo, a seguinte passagem:

Gama – O perímetro do triângulo é inferior a 40, portanto 18 mais 12 dá 30.

Ruben – Então sendo assim pode ser 0,00000….1 cm.

Gama – Então vai de zero. Não, zero não!

Gama – 40 menos 30 dá 10.

Cunha – Então o máximo é 10 e o mínimo é 1.

Ruben – Não. Pode ser zero vírgula qualquer coisa.

Gama – Então é]0,10].

Ruben – O perímetro do triângulo é inferior a 40 não é 40, por isso não pode ser 10.

Cunha – Então é]0,10[pronto já está!

Após observar diretamente o trabalho dos alunos, procurei auxiliar o seu pensamento no sentido de fazer com que o grupo, por meio de questionamentos sucessivos, conseguissem compreender que algo não estava bem:

Professora – Como estamos?

Custódio – Isto é óbvio.

Professora – Então, conseguem construir um triângulo em que um dos lados mede 18 cm, o outro 12 cm e o outro zero vírgula…?

Gaspar – Ah pois é!

Professora – Quanto é que mede o outro lado *x*? É possível o outro lado *x* medir um? Façam lá essa experiência.

Gaspar – Não dá, porque tipo as medidas não ficam certas.

Após questionar o grupo sobre se era possível construir um triângulo cujos lados meçam 18, 12 e 1 (centímetro), os alunos fazendo essa experiência com régua e compasso perceberam que não era possível. O Rui conseguiu recordar-se da propriedade da desigualdade triangular, deixando os seus colegas estupefactos, no seguinte diálogo:

Rui – Era aquela cena em que a soma dos dois lados menores tem de ser maior que o lado maior ou uma coisa assim. Não é nada disso?

Professora – Não se recordam de nenhuma propriedade dos triângulos?

Rui – Era a propriedade, acho que era que o lado maior tem de ser menor que a soma dos dois lados menores.

Gaspar – Como é que é?

Professora – Chama-se desigualdade triangular. O comprimento de qualquer lado é menor que a soma do comprimento dos outros dois.

Depois dos alunos se recordarem da propriedade foi fácil compreenderem que o outro lado teria de medir pelo menos 6 cm, conforme se pode constatar no excerto que se segue:

Rui – Se o lado maior é 18 não pode ser 12 mais um, que dá 13.

Gaspar – Então tem de ser pelo menos…

Custódio e Rui – 6!

Gaspar – É 6 com a cena [o parêntesis] para fora!

Custódio – Mas não pode ser 6. Tem de ser 7!

Rui – Não porque o parêntesis é para fora! 6,00001 já pode ser.

Custódio – Ah pois é!

Na realização desta tarefa o grupo do Rui exprime a sua justificação oralmente e por escrito, representando corretamente o intervalo. Na justificação dos limites inferior e superior do intervalo, o grupo utiliza argumentos válidos.

Na figura seguinte apresenta-se a resposta do grupo do Rui:

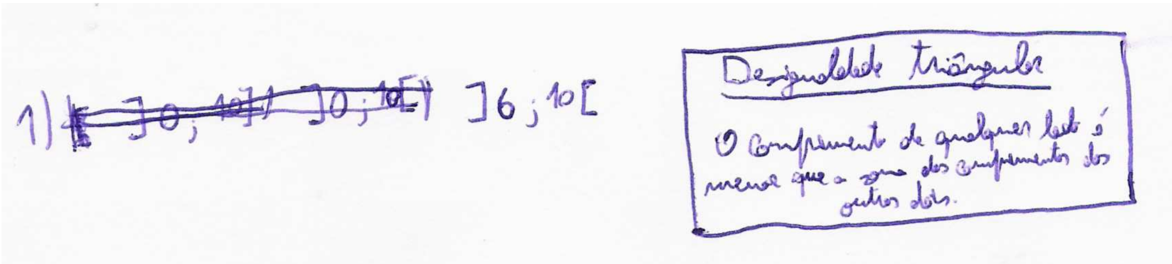


Figura 43 – Resposta do grupo do Rui à tarefa "Perímetro do triângulo"

Na obtenção do menor valor que x pode tomar, todos os grupos evidenciaram inicialmente algumas dificuldades, ao considerar que seria possível construir um triângulo com quaisquer medidas positivas. No entanto, após a minha intervenção o grupo do Rui conseguiu recordar-se da propriedade da desigualdade triangular, estabelecendo facilmente conexão com o perímetro do triângulo. Neste caso, o grupo baseou-se numa propriedade e aplicou-a ao caso particular do enunciado. Na resolução desta tarefa reparei que todos os grupos indicaram apenas valores positivos de x e excluíram o zero, estabelecendo conexão do conceito de medida.

O grupo da Clara à semelhança do grupo do Rui também pensou inicialmente que seria possível construir um triângulo cujos lados medissem por exemplo 18, 12 e 1 centímetros. À questão levantada ao grupo da Clara sobre se era possível o outro lado x medir uma unidade, os alunos responderam que tinham ouvido a discussão com o grupo do Rui, e que já sabiam que tinham de usar "a tal" propriedade da construção dos triângulos. Assim sendo, questionei-os sobre quanto é que seria o menor valor possível para a medida do lado x, ao que a Clara concluiu rapidamente, que teria de ser "*18 menos 12 que dá 6, por isso mede 6 cm*". Ao questionar se o 6 era *"inclusive ou exclusive"* a aluna respondeu *"inclusive"*, concluindo que $x \in [6,10[$. Por esta resposta percebe-se que a Clara estabelece a conexão com o conceito de medida, mas não aplica adequadamente a propriedade da desigualdade triangular, visto que inclui o limite inferior do intervalo. No entanto mais tarde, após o momento de discussão, a Clara corrigiu a sua resposta, depois de compreender que o comprimento de qualquer lado é menor (e não igual) que a soma do comprimento dos outros dois, escrevendo $x \in]6,10[$ conforme se mostra na figura seguinte:

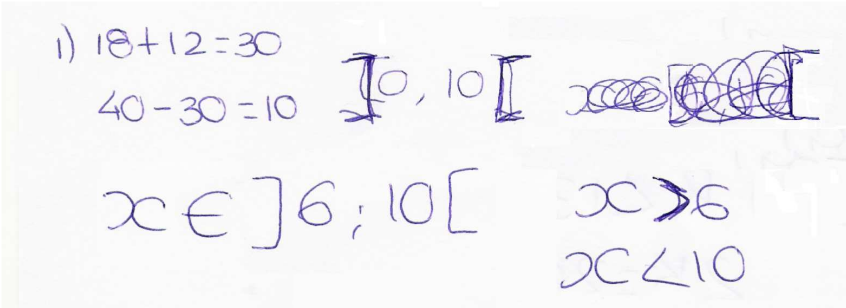


Figura 44 – Resposta do grupo da Clara à tarefa “Perímetro do triângulo”

Pode-se reparar também que, embora não seja solicitado no enunciado, este grupo procede na resposta apresentada (na figura 44) à tradução da linguagem natural para a linguagem algébrica ao escrever que $x > 6$ e $x < 10$.

Há semelhança dos grupos do Rui e da Clara, também o grupo da Íris considerou que seria possível construir o triângulo com quaisquer medidas positivas, apresentando para possíveis valores de x, o intervalo de números reais $[1{,}10[$ na seguinte resposta:

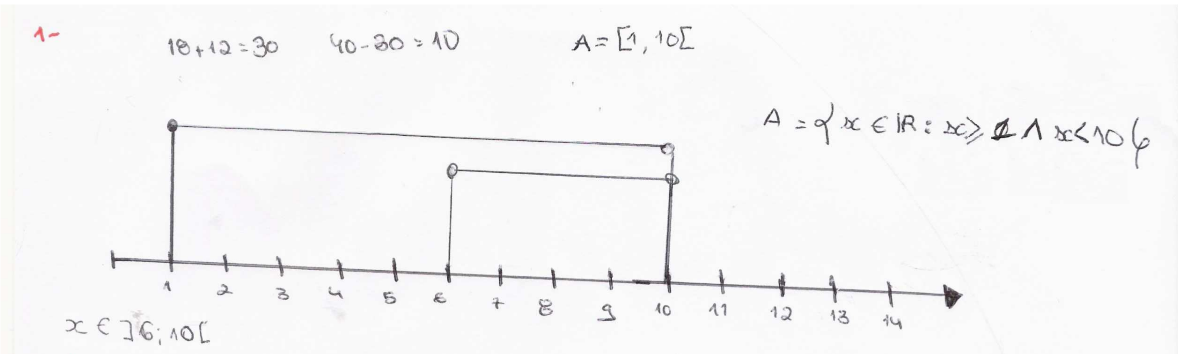


Figura 45 – Resposta do grupo da Íris à tarefa “Perímetro do triângulo”

Reparo que na resolução apresentada, embora não fosse pedido no enunciado, as alunas procederam também à representação gráfica e em compreensão do intervalo de números reais a que chegaram. Depois de observar a resposta das alunas durante o momento de realização do trabalho autónomo, à semelhança do que diálogo que tive nos grupos da Clara e do Rui, questionei o grupo da Íris se “*É possível o outro lado x medir um?*” ao que a Íris me respondeu *“sim, acho que é possível o x medir 1”*. Disse-lhes então para fazerem essa experiência, com auxílio de uma régua e compasso. Depois de experimentarem construir o triângulo com recurso a material de desenho e de discutirem entre si se aquele x poderia ser 1, percebe-se que as alunas compreenderam que não era possível fazer a sua construção, com a seguinte afirmação da Íris: *“Não dá, não consegues construir!”*.

Após a discussão com o grupo-turma, a generalidade da turma conseguiu perceber que para determinar os valores que x poderia tomar, teriam de utilizar a propriedade da desigualdade triangular. E deste modo, o grupo da Íris concluiu corretamente (na figura 45) que o intervalo a que x pertence é $]6,10[$ e procedeu de novo à sua representação gráfica.

Capítulo 5 – Reflexão sobre o trabalho realizado

Neste capítulo apresento a síntese do estudo, começando por relembrar o seu objetivo, o enquadramento teórico base, a planificação da unidade de ensino e as opções metodológicas adotadas. Posteriormente, respondo às questões orientadores desta investigação, destacando as principais conclusões relativas às dificuldades dos alunos e aos processos por eles utilizados na realização de tarefas que envolvem a noção de número real. Termino com uma reflexão pessoal sobre o trabalho realizado, destacando as minhas aprendizagens e os contributos para a minha atividade futura de docente.

5.1 Síntese do Estudo

O ponto de partida deste estudo assentou no objetivo de compreender quais as dificuldades que os alunos do 9.º ano evidenciam na aprendizagem da noção de número real. A minha motivação para a realização desta investigação foi procurar respostas para as questões orientadoras deste estudo, que ainda não foram abordadas nem respondidas por completo noutras teses ou estudos de investigação. A par disso, realizei e estruturei o meu estudo procurando mergulhar em toda a bibliografia que consegui coletar.

Associada à noção de número real, o quadro teórico evidencia a complexidade dos conceitos de número racional e irracional, em diversos contextos, constatando-se que os alunos têm muita dificuldade na aquisição destas noções e na distinção deste tipo de números. Vários investigadores referem que o processo da aprendizagem dos números reais é complexo para os alunos e que constitui um desafio para o professor a escolha de estratégias mais adequadas para a promoção dessa aprendizagem.

Este estudo teve por base a lecionação desenvolvida no 2.º período, no conjunto de onze aulas de quarenta e cinco minutos, incidindo no tópico dos números reais, com alunos do 9.º ano de escolaridade. A unidade de ensino integra as orientações do Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) bem como as principais indicações a respeito do ensino dos números reais dos Princípios e Normas da Matemática Escolar (NCTM, 2007). O quadro teórico apresentado pretende servir de apoio a este estudo permitindo confrontar as investigações feitas por outros docentes com a aquisição de novos dados. Tendo em vista a aprendizagem dos números reais, as tarefas apresentadas tiveram por base os materiais de apoio da DGDIDC e o próprio manual escolar adotado pela escola. Com o objetivo de analisar as dificuldades dos alunos e de compreender os processos utilizados na resolução de tarefas com diferentes naturezas (exploratória, exercícios e problemas) segui uma abordagem qualitativa, de natureza interpretativa. A recolha de dados inclui as produções escritas dos alunos, a gravação áudio das interações verbais em alguns grupos e dois testes. Esta recolha foi efetuada em ambiente de sala de aula e as tarefas foram sempre realizadas em pares ou em grupo. O diário de bordo e as reflexões pós aula serviram de complemento a esta recolha.

5.2 Principais Conclusões

Com este subcapítulo sintetizo o trabalho desenvolvido procurando dar respostas às questões deste estudo.

i) Como procedem os alunos para distinguir números irracionais de números racionais em diversas representações e que dificuldades evidenciam?

A noção de número irracional é complexa e pode demorar muito tempo a ser construída e interiorizada pelos alunos. Embora não se possa afirmar com certeza que existe uma aprendizagem significativa desta noção, dada a complexidade de outras noções implicitamente envolvidas (como é o caso da incomensurabilidade e da densidade de um conjunto), nas aulas lecionadas houve várias aproximações à construção desta aprendizagem, constatando-se que os alunos aprendem a noção número irracional com base no conhecimento prévio que têm da noção de número racional.

A representação é algo que não podemos prescindir na aprendizagem de algumas noções matemáticas. No entanto, as próprias representações podem gerar obstáculos e dificuldades para o aluno. Na realização da primeira tarefa "Sequência de figuras" alguns alunos evidenciaram ter dificuldades em representar uma dízima infinita periódica correspondente a um número racional, com a indicação do período da dízima ou com o uso de reticências. Num caso particular, a Clara limitou-se a registar os dígitos que o visor da calculadora apresenta para escrever a dízima correspondente a cada uma das frações. Este erro também ocorreu com outros alunos, fazendo-me crer que para eles o número representado pela dízima infinita periódica e a sua aproximação parecem ter o mesmo significado. No entanto, verificou-se que nas aulas seguintes estes alunos foram evoluindo para uma perceção mais correta, representando adequadamente os períodos das dízimas infinitas periódicas.

Para decidir a irracionalidade de um número verifica-se que os alunos recorrem com frequência à representação decimal finita apresentada no visor da máquina de calcular. Para além disso, números representados na forma de fração com numerador e denominador inteiros são classificados com frequência como sendo irracionais. Por exemplo na tarefa "Dízima" o grupo da Íris classificou o número $\frac{368}{491}$ como sendo irracional, porque a representação da dízima infinita aparentava não ter período. Esta dificuldade foi também sentida na questão 5 do teste do dia 13 de Maio, em que alguns alunos (a Íris e Rodrigo) deram como exemplos de números irracionais, números representados na forma de fração. Recordo ainda outra dificuldade que houve por parte de alguns alunos, que deram como exemplos de números irracionais as dízimas finitas.

No que diz respeito à formulação da regra que permitisse traduzir para a forma de fração qualquer dízima infinita periódica, os grupos seguem uma abordagem indutiva, partindo da observação de casos particulares. De uma forma geral os alunos aproximaram-se da generalização pretendida, manifestando apenas algumas dificuldades na tradução para linguagem natural da conclusão a que chegaram. Verificou-se no entanto que, esta dificuldade foi facilmente ultrapassada após a minha intervenção: quando por meio de questionamentos sucessivos, houve alunos que conseguiram justificar corretamente o seu processo de raciocínio indutivo, chegando à formulação completa da regra.

Na classificação dos números reais como sendo racionais ou irracionais, alguns alunos identificam os números racionais como sendo apenas os números inteiros, esquecendo-se que as dízimas finitas são também números racionais. Recordo que esta dificuldade foi evidenciada pelo Hugo e pela Júlia, na tarefa "Descoberta de um novo conjunto". A dificuldade destes alunos vai de encontro ao que é mencionado pelos investigadores Igliori e Silva (2001) que dizem que alguns alunos tendem a definir um número racional como sendo um número que "é exato ou inteiro". Para além disso, estes autores destacam ainda a dificuldade dos alunos que afirmam que os números irracionais são todos aqueles que são as dízimas infinitas ou que são representados sob um radical.

Na descrição da característica que um número tem que ter para que a sua raiz quadrada seja um número racional, a grande maioria dos alunos considerou apenas os quadrados perfeitos, havendo casos de alunos que também indicaram exemplos de frações, em que o numerador e o denominador são quadrados perfeitos. A par disso, alguns alunos da turma evidenciaram dificuldade em classificar determinados radicais como sendo números racionais ou irracionais. Por exemplo, na questão 4, raízes quadradas de números que são quadrados perfeitos ou que são representados pelo quociente de quadrados perfeitos foram classificados pelos grupos do Hugo e do Rui como sendo irracionais. Deste modo, penso poder afirmar que a representação dos números sob a forma de um radical constitui um obstáculo na classificação dos números reais, como racionais ou irracionais.

Diferentemente do que refere Penteado (2004) no meu estudo são poucos os alunos que tendem a associar aos números irracionais todas as dízimas infinitas, existindo nesta turma apenas o caso da Júlia que evidencia esta dificuldade, dando a entender que ainda não compreendeu que uma dízima infinita periódica representa um número racional e que uma dízima infinita não periódica representa um número irracional. Devo referir que ainda há alunos que consideram números racionais representados sob a forma de fração com numerador e denominador inteiros, como sendo irracionais. Por sua vez, Fichbein (1995, p.43) refere que os alunos tendem a definir um número irracional como sendo um número "não inteiro". Também esta associação surgiu com alguma frequência nos questionamentos feitos a alguns alunos (Rodrigo, Íris e Custódio) quando questionados sobre "*o que é um número irracional?*" me responderam "*é um número que não é inteiro*".

Quanto aos processos utilizados pelos alunos na identificação de números reais, os grupos da Íris e do Rui, tendo por base as definições dos números racionais e irracionais, evidenciaram saber classificar as dízimas infinitas apresentadas, recorrendo a argumentações e justificações válidas nos questionamentos feitos em aula. Por exemplo no grupo da Íris, as alunas referiram corretamente que um determinado número é irracional, porque na representação da dízima existe uma sequência de algarismos crescente que nunca se repete. Por outro lado, o grupo do Rui também evidenciou saber identificar sem dificuldade os números racionais e irracionais, distinguindo corretamente as dízimas infinitas periódicas e não periódicas.

ii) Como procedem os alunos para representar números reais na reta real e que dificuldades manifestam?

De acordo com Rezende (2003, p.29) alguns números irracionais são encarados como “nebulosos”, porque muitos deles não possuem uma determinada posição na reta numérica e “só existem na matemática abstrata”. Neste âmbito, Maia (2012, p.1) refere que a grande dificuldade dos alunos surge quando têm de “localizar raízes quadradas inexatas na reta numérica”. Esta dificuldade torna-se também evidente por alguns alunos, na resolução da questão 2.2 da tarefa “Reta real”, que demoraram algum tempo para compreender porque tinham de construir um triângulo retângulo para fazer a marcação exata das raízes quadradas inexatas, em vez procederem à marcação dos seus valores aproximados. Deste modo, verifica-se que alguns alunos ainda estão muito agarrados à representação aproximada dos números. Neste contexto, Oliveira e Fiorentini (2007) referem que o objetivo da marcação de números irracionais que se apresentem na forma de raiz, só pode ser atingido se os alunos estabelecerem a sua conexão com o teorema de Pitágoras e o souberem aplicar adequadamente. No que diz respeito à aplicação do teorema de Pitágoras, verifica-se que embora alguns alunos se enganam nos cálculos provavelmente por lapso na indicação dos quadrados dos catetos, evidenciam que têm presente a noção do teorema de Pitágoras.

Quaresma (2010, p.110, p. 175) indica que os alunos por vezes apresentam dificuldades em traduzir a representação na forma de fração para a representação decimal, não compreendendo a relação que existe entre as duas representações. Esta dificuldade não foi encontrada explicitamente neste estudo, no entanto verifica-se que a localização de raízes quadradas de números que se apresentam sob a forma de fração constitui uma dificuldade para alguns alunos. Por exemplo, na questão 2.2, o grupo da Íris assinalou $-\sqrt{\frac{1}{16}}$ na reta numérica como sendo o ponto $-4{,}5$.

Na representação dos números racionais, Kreemer (2001, p.32) destaca que os alunos “possuem uma grande dificuldade na escolha da unidade com que vão contar as partes do todo e as partes tomadas desse todo”. Esta dificuldade da contagem de número de partes do todo também foi manifestada por alguns alunos no teste do dia 4 de Março. Saliento a dificuldade que o Rodrigo teve em representar na reta real o número $-2-\frac{1}{4}$, procedendo à divisão da unidade em 4 partes, em vez de a dividir em 3. Este aluno representou o número dado por $-2-\frac{1}{4}$.

Verifica-se que a localização na reta real de um número que se apresente na forma decimal não tende a suscitar dúvidas para a maioria dos alunos, sendo feita rigorosamente com recurso a material de desenho (régua e esquadro). No que diz respeito à localização das raízes inexatas na reta real, apesar de alguns alunos terem evidenciado inicialmente alguma dificuldade em estabelecer conexão da tarefa "Reta real" com a tarefa anterior "Espiral", de um modo geral a maioria dos alunos aplicou bem a sequência dos triângulos retângulos da Espiral e o teorema de Pitágoras.

Na marcação de determinados números negativos que se apresentem na forma de fração, alguns alunos tendem a esquecer-se do sinal desses números. Para fazer a marcação exata de alguns números representados na forma de fração, como foi o caso da localização de $\frac{1}{3}$ na reta real, alguns grupos tiveram inicialmente dúvidas, recorrendo à máquina de calcular para dividir a unidade em 3 partes iguais, mas após a minha intervenção esta dificuldade foi ultrapassada e os alunos assinalaram corretamente os números apresentados, com auxilio de material de desenho (compasso e esquadro).

iii) Como procedem os alunos para comparar números reais em diversas representações e que dificuldades revelam?

A análise dos resultados mostra que a comparação e a ordenação dos números reais são tarefas simples quando se recorre à representação na reta real. Quanto ao processo utilizado, os alunos referem que este se baseia na mera observação dos números representados na reta real, e que a partir daí é fácil proceder à sua ordenação. No que diz respeito à comparação de números decimais e fracionários surgem por vezes algumas dificuldades em comparar números racionais que sejam negativos. Assim, sugere-me pela análise das produções que os alunos que erram na comparação dos números racionais negativos se esquecem com frequência do sinal, procedendo à sua comparação como se estes se tratassem de números positivos.

À semelhança de Quaresma (2010, p.178), que menciona que os alunos têm dificuldade "em ordenar e comparar numerais decimais com desigual número de casas decimais e não conseguem ordenar um conjunto de números representados de diferentes formas", neste estudo foram vários alunos que evidenciaram esta dificuldade: quando comparam um número irracional representado sob a forma de raiz quadrada com um número racional representado por uma dízima de valor próximo a este. Recordo que cerca de metade da turma ao comparar $\sqrt{2}$ e 1,4142 indicou que os números eram iguais, devido ao facto do radical $\sqrt{2}$ na calculadora apresentar uma dízima em que parte dos primeiros algarismos são os mesmos de 1,4142. Deste modo, alguns alunos podem ser levados a pensar que uma dízima infinita e o seu valor aproximado representam o mesmo número.

Para proceder à comparação de números reais, verifica-se que os alunos recorrem frequentemente à máquina de calcular para traduzir um número representado na forma de fração ou sob um radical para a forma decimal, e a partir da representação encontrada procedem à comparação das casas decimais. Constata-se também que alguns alunos, nomeadamente a Clara evidencia ainda dificuldades em utilizar a simbologia de menor e maior, confundindo ambos os sinais.

A comparação dos números traz muitas vezes consigo a compreensão necessária das aproximações por excesso, por defeito e a escolha da melhor ou pior aproximação. Na tarefa "π" verifica-se que os alunos não tiveram dificuldade em compreender qual a melhor aproximação para este número. No entanto, quando se pediu aos alunos para escolherem a pior aproximação entre as apresentadas, houve uma dificuldade em dois grupos de trabalho, em que os alunos confundiram o menor valor com o valor que efetivamente que mais se distancia de π. Esta dificuldade foi facilmente ultrapassada no grupo do Rui, quando os alunos por meio do diálogo e com recurso à calculadora fizeram a diferença entre cada uma das aproximações apresentadas e o número π. No que diz respeito às aproximações por excesso e por defeito todos os alunos identificaram corretamente as aproximações superiores e inferiores a π, não sendo evidente a existência de qualquer dificuldade.

iv) Que dificuldades os alunos revelam na representação simbólica e gráfica de intervalos de números reais e na tradução de uma representação para a outra?

De acordo com Duval para um mesmo objeto matemático, o aluno desenvolve uma aprendizagem significativa quando transita entre representações, procedendo ao seu tratamento, conversão e coordenação. Deste modo, o mesmo autor defende que, é indispensável que o aluno saiba representar um dado objeto matemático em diversos registos de representação (através da linguagem natural, simbólica, gráfica, entre outros), alargando a sua compreensão sobre um mesmo objeto matemático quando aprende a tratar cada uma das representações, a passar de uma representação para outra e coordenar as várias representações, estabelecendo relações entre elas. Nos exercícios propostos à turma sobre a representação de números reais e a tradução de uma representação para outra, a maioria dos alunos procede corretamente ao seu tratamento e conversão. No entanto, tendem a surgir erros pontuais quer na representação gráfica, quer na representação simbólica dos conjuntos de números reais.

Na representação gráfica verifica-se que embora os alunos não tenham dúvidas em representar graficamente um intervalo fechado ou aberto à direita (à esquerda) procedendo corretamente à representação das bolas nos extremos (com e sem preenchimento), nos casos em que os intervalos são ilimitados à direita (à esquerda) alguns alunos tendem a representá-los graficamente como se estes fossem limitados, isto é, indicando com a representação de bola aberta correspondendo a $+\infty$ $(-\infty)$. Para além disso, na tradução da representação geométrica para a representação em compreensão surgem com frequência nas produções dos alunos a representação de condições do tipo: $-\infty < x \leq 5$ e $3 < x < +\infty$, onde a escrita de $-\infty < x$ e $x > +\infty$ era desnecessária.

Ainda nos exercícios que envolvem a transição da representação geométrica para a representação em compreensão dos conjuntos, perante intervalos ilimitados à esquerda ou à direita, alguns alunos enganam-se na escrita de condições que representam o conjunto de números reais apresentados na forma de intervalo e/ou graficamente, usando o sinal maior que em vez de usar o sinal menor que, e reciprocamente. Por sua vez, na transição da representação simbólica para a representação gráfica, verifica-se que os alunos têm dificuldade em representar graficamente um conjunto de números reais que se apresente na forma de uma condição. Um exemplo concreto desta dificuldade foi quando a Clara ao representar a condição $-\frac{5}{30} \geq x$, representou graficamente todos os números reais que são maiores ou iguais a $-\frac{5}{30}$. Quanto à reunião de intervalos, a turma não evidenciou quaisquer dificuldades, procedendo corretamente à sua representação nos exercícios propostos na aula. Na representação gráfica da interseção de conjuntos dados na forma de intervalo, os alunos em geral revelaram um bom desempenho.

Houve no entanto um grupo, o da Íris, que quando foi pedida a interseção dos conjuntos $[2,3]$ e $]1,3]$ respondeu $[2,3]$, não considerando que o elemento 3 não pertence a ambos os conjuntos apresentados. No que respeita ao processo utilizado na representação de conjuntos de números reais, é de chamar a atenção que alguns alunos procuram uma abordagem mais intuitiva com tendência a partir da representação gráfica para outras representações simbólicas (na forma de intervalo ou em compreensão).

5.3 Reflexão final

Fazendo um balanço final relativo ao trajeto de aprendizagem definido, penso poder afirmar que os alunos o percorreram no seu essencial, começando com a identificação de números racionais e irracionais, passando para a representação numérica, comparação e ordenação dos números, e finalizando com a resolução de problemas envolvendo enquadramentos, bem como a representação e interpretação de intervalos de números reais.

Ao longo da realização deste trabalho tive a oportunidade de ir refletindo sobre a minha prática letiva enquanto professora. Para além de fazer uma descrição sumária das aulas, senti necessidade de ir fazendo algumas considerações reflexivas sobre o trabalho desenvolvido pelos alunos e sobre o meu próprio trabalho, analisando as opções tomadas na prática e propondo estratégias de melhoramento. Este subcapítulo numa abordagem mais geral serve de complemento à reflexão feita no subcapítulo 3.4.

Desde o início do ano letivo, acompanhei uma turma do 9.º ano, como professora estagiária. No primeiro período, as minhas intervenções pontuais correram bem, constituindo um factor de surpresa para os alunos. Nessas aulas pedi a vários elementos da turma que tinham mais dificuldades que fossem ao quadro e apostei inclusivamente numa aluna com Necessidades Educativas Especiais, que poucos professores arriscavam a mandá-la ao quadro. Estes alunos foram bem sucedidos na realização das tarefas propostas, ficando deste modo mais motivados para o estudo desta disciplina. Relativamente à lecionação da unidade didática dos números reais, logo de início houve a necessidade de conquistar a confiança de alguns alunos, que não se sentiram muito à vontade ao saberem que eu iria lecionar um período consecutivo de aproximadamente 3 semanas, por me verem apenas como uma professora estagiária.

Nas primeiras aulas lecionadas, alguns alunos disseram que se sentiam desconfortáveis por não estarem habituados a que lhes fosse dito o tempo que deveriam demorar para resolver uma dada tarefa. Neste sentido, sempre que foi possível, tentei flexibilizar mais o tempo previsto das tarefas. No decorrer da lecionação, após refletir em conjunto com os meus professores sobre a prática pedagógica adotada com a turma, compreendi que inicialmente estava muito centrada no que tinha previsto realizar e que devia ser mais permeável ao que estava a acontecer na sala de aula. A partir desse momento procurei valorizar mais aquilo que estava a acontecer na aula e criei uma maior interação e diálogo com os alunos. Após essa fase de transição, os alunos trabalharam mais ao seu ritmo e também com mais entusiasmo. Inclusivamente consegui mudar a atitude de vários alunos que estavam reticentes com a minha atividade no início, conquistei a sua simpatia e esses alunos tomaram gosto por se esforçar na disciplina de matemática. Mesmo após a minha intervenção letiva continuei a apoiá-los de perto para que sentissem um apoio constante e que havia uma preocupação da minha parte com a sua aprendizagem.

Em relação à unidade didática propriamente dita, os comentários e as sugestões dos professores orientadores e da professora cooperante que me acompanharam, levaram-me refletir sobre as minhas aulas, no sentido de me fazer ver que existem múltiplas estratégias e múltiplos caminhos de serem aplicados. Como é natural, devido à minha reduzida experiência de prática de ensino, ao longo da lecionação deparei-me com diversas situações que podia ter atuado de outra forma e fui-me apercebendo que algumas tarefas podiam ter sido talvez melhor aproveitadas, sendo-lhes dedicadas mais tempo e havendo mais interação com os alunos. As discussões com os professores foram uma oportunidade única para aprender, porque me fizeram refletir sobre que tipos de estratégias funcionariam melhor e podiam ser ajustadas aos diversos momentos de uma aula.

Em algumas aulas gostaria de ter dedicado mais tempo ao trabalho autónomo dos alunos, no entanto a exposição e a clarificação de algumas noções teóricas matemáticas revelou também ser importante para que num momento posterior dedicado a esse trabalho os alunos não tivessem tantas dúvidas e mais facilmente ultrapassassem as suas dificuldades.

Relativamente às discussões, houve um aspeto que destaco como particularmente positivo que foi o facto de ter introduzido de uma forma natural “pontos de interrogação” no diálogo com os alunos. Perante a resposta de um aluno frequentemente escrevia no quadro pontos de interrogação, para lançar a discussão à turma. Nesses momentos pedi também a concordância do resto da turma procurando saber se estavam de acordo com aquilo que os colegas diziam, fomentando assim a aprendizagem dos alunos pela partilha e troca de ideias.

Uma das maiores aprendizagens que fiz com este trabalho foi não puder afirmar com toda a certeza que os alunos já possuem uma aprendizagem significativa da noção de número irracional, dada a sua complexidade. Com este estudo, aprendi também que passados alguns meses de ter sido lecionada a unidade, alguns alunos tendem a esquecer as definições de número racional e irracional (porque estas são decoradas). No entanto, à semelhança do que fiz em algumas aulas, em véspera de preparação de testes, aprendi que é sempre possível reforçar a aprendizagem dos alunos e retomar certas matérias, no sentido de fazer desaparecer algumas dificuldades ocultas que ainda se mantenham.

Com este trabalho aprendi que, na realização de algumas tarefas às vezes é preferível em vez de fazer uma pergunta a um aluno, dar-lhe instrumentos para que este consiga desenvolver autonomamente a sua aprendizagem, dizendo-lhe por exemplo: desenha, começa pelo mais número mais pequeno, experimenta, faz por ordem. Estas indicações podem ser boas alternativas a ter em conta, quando as questões são demasiado abertas ou aparentemente difíceis de responder.

A realização deste estudo exigiu da minha parte uma atitude de questionamento constante e de responsabilização pelas opções tomadas. A escolha dos dados para proceder à sua análise constituiu inicialmente uma tarefa difícil, devido à grande quantidade de elementos recolhidos. No entanto, considero que esta recolha é uma mais valia para qualquer professor e investigador, porque isso dá um conhecimento mais profundo das dificuldades da turma e permite ir para além da mera observação direta, percecionada no decorrer das aulas.

No que respeita à minha prática futura, perante um tópico tão complexo, como é a lecionação da unidade dos números reais sentirei certamente uma confiança mais sólida para lecionar esta unidade. Depois desta experiência enriquecedora, fiquei interessada em aprofundar o estudo das inequações. A resolução de alguns problemas que envolvem inequações torna-se na minha opinião particularmente fascinante por estabeleceram conexões entre os três grandes temas da matemática: Números e operações, Álgebra e a Geometria. Visto que as inequações dão continuidade à unidade lecionada, confesso que tenho alguma curiosidade em estudar as dificuldades dos alunos neste novo tópico, pois neste caso estes terão não só de adquirir destreza com os números, mas também evidenciar uma nova aprendizagem relativa à simplificação de expressões algébricas.

Notei que, os alunos aprenderam com a minha intervenção e o meu apoio constante, mas eu reconheço que também aprendi muito com eles, ao longo desta etapa. Retirei muita informação relevante para a minha prática futura, aprendi bastante com as observações e críticas construtivas dos meus professores e termino com a certeza de que é esta profissão futura que me preenche por dentro, e me faz feliz.

Referências

Bartolomeu, V. (2010). Conhecimentos e dificuldades dos estudantes do ensino médio ao conjunto dos números reais. Mestrado profissional em Ensino de Matemática. Universidade Católica de São Paulo. (Disponível em: http://www.pucsp.br/pos/edmat/mp/dissertacao/vivaldo_bartolomeu.pdf).

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). *Rational number, ratio, and proportion. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning*, pp. 296-333. New York: Macmillan.

Brunheira, L. (2000). O conhecimento e as atitudes de três professores estagiários face à realização de actividades de investigação na aula de matemática. Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa. Lisboa: APM.

Canavarro, A. (2011). Ensino exploratório da Matemática: práticas e desafios. Educação e Matemática, 115, pp.11-17. (Disponível em p3m.ie.ul.pt/files/files/download/fileid/116)

Cezar, M. (2011). Concepções acerca de números reais: uma breve reflexão sobre seu ensino na Educação Básica. Universidade Federal do Espírito Santo. São Mateus. (Disponível em http://www.ceunes.ufes.br/downloads/43/ppgedu-monografiaMariana%20dos%20Santos.pdf)

César, M., Torres, M., Caçador, F. & Candeias, M. (1998). E se eu aprender contigo? A interação entre pares e a apreensão de conhecimentos matemáticos. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática. (Disponível em spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/1998/1998_06_MCesar.pdf)

Costa, L. (2009). Números Reais no Ensino Fundamental: Alguns obstáculos epistemológicos. Faculdade de Educação, da Universidade de São Paulo. (Disponível em www.teses.usp.br/teses/.../LETICIA_VIEIRA_OLIVEIRA_COSTA.pdf)

Domingues, C. & Martinho, M. (2011). Os raciocínios dos alunos na descoberta de dízimas finitas. Uma experiência com alunos de uma turma do 9.º ano. In: Actas XXII SIEM (Seminário de Investigação em Educação Matemática). Lisboa: APM. (Disponível em http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/15917)

Duval, R. (1993). *Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la penseé. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, vol. 5. IREM-ULP, *Strasbourg*, pp. 37-65. *Sémiosis et pensée humaine*. Berna: Peter Lang.

Duval, R. (2003). Registos de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. In: Aprendizagem em Matemática. Machado, S. D. A. (org.). Campinas, SP: Papirus, 2003.

Duval, R. (2009). Semiósis e pensamento humano: registos semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Livraria da Física.

Fischbein, E.; Jehian, R.; Cohen, D. (1995) - *The Concept of Irrational Numbers in High-School Students and Prospective Teachers. Educational Studies in Mathematics*. jul. v. 29, n. 1, p. 29-44. (Disponível em www.jstor.org/stable/3482830).

Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). *Understanding teaching and classroom practice in mathematics. In F. Lester (Ed.), Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 225-256). Greenwich, CT: Information Age.

Garcia, V. (2005). Ensino dos números irracionais no nível fundamental. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Instituto de Matemática. Departamento de matemática pura e aplicada. (Disponível em http://euler.mat.ufrgs.br/~vclotilde/publicacoes/GR%C1FICA-IRRACIONAIS.pdf)

Gouveia, J. (2007). Estudo de intervalo sobre R a partir de situações contextualizadas aplicadas ao ensino médio e superior. Mestrado de ensino em ciências e matemática. Universidade Cruzeiro do Sul, de São Paulo. (Disponível em http://sites.cruzeirodosulvirtual.com.br/pos_graduacao/trabs_programas_pos/trabalhos/Mestrado_Ensino_de_Ciencias_e_Matematica/MESTRADO-Juvenal%20de%20Gouveia_137.PDF)

Igliori, S e Silva, B. (1998) Conhecimento das concepções prévias dos estudantes sobre números reais: um suporte para a melhoria do ensino-aprendizagem. Anais da 21a Reunião Anual da ANPED, Caxambu.

Igliori, S. e Silva, B. (2001). Concepções dos alunos sobre números reais. In: Laudares, João Bosco, Lachini, Jonas. Educação matemática: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte: FUMARC, 2001. 39-67.

Karlson, P. (1961). A Magia dos Números. Rio de Janeiro, Editora Globo.

Kremer, S. (2001). Números reais: a visão de uma aluna. Monografia apresentada para obtenção do grau em Licenciatura Plena de Matemática. Florianópolis. (Disponível em http://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/97154/Silvana_Kremer.PDF?sequence=1).

Lamon, S. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers (2.ª ed.).* Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Association.

Lima, C. (2010). Representação dos números racionais e a medição de segmentos: possibilidade com tecnologias informáticas. Dissertação de Mestrado. Universidade estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. (Disponível em: http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/dissetacoes/woerle_lima_c_me_rcla1.pdf)

ME (2007). Programa de matemática do ensino básico. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência/ DGIDC.

ME (2011). Números reais e Inequações. Proposta de sequência de tarefas para o 9.º ano – 3.º ciclo – Outubro de 2011. Lisboa: Ministério da Educação/ DGIDC. (Disponível em http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/066-cadeia-reais-inequacoes.pdf).

ME (2013). Programas e metas curriculares da Matemática do Ensino Básico. Homologado a 17 de Julho de 2013. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.

Maia, M. (2012). Raiz quadrada através da construção geométrica. XXVI Reunião Latino Americana de Matemática Educativa. (Disponível em http://www.ufop.br/downloads/parte_08__oficinas___anais_relme_26.pdf)

Miguel, A.(1993). Três Estudos Sobre História e Educação Matemática. Tese de Doutorado em Educação. Faculdade de Educação, Unicamp, Campinas. (Disponível em http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=vtls000069861)

Nakamura, K. (2008). Conjunto dos números irracionais: a trajetória de um conteúdo não incorporado às práticas escolares. Mestrado profissional em Ensino de Matemática. Universidade Católica de São Paulo. (Disponível em http://www.sapientia.pucsp.br/tde_arquivos/13/TDE-2008-07-28T06:10:15Z-6112/Publico/Keiji%20Nakamura.pdf)

NCTM (2007). Princípios e normas para a Matemática Escolar. Lisboa: APM.

Oliveira, T. e Fiorentini, D. (2007). Produzindo significados aos números reais em um contexto exploratório-investigatico. Pesquisa financiada pela FAPESP. (Disponível em www.sbem.com.br/files/ix_enem/...Cientifica/.../CC30662355806T.doc)

Oliveira, A. (1980). Teoria de Conjuntos Intuitiva e Axiomática. Livraria Escolar Editora.

Pereira, J. (2012). O raciocínio matemático em alunos do 9.º ano no estudo dos números reais e inequações. Dissertação de Mestrado em Educação. Área de especialização em Didática da Matemática. Instituto de Educação, da Universidade de Lisboa.

Pessoa, J. (2012). Os números irracionais no ensino fundamental: uma análise do contexto Didático e seu ensino. Trabalhando Matemática: percepções contemporâneas. Paraíba. (Disponível em http://editorarealize.com.br/revistas/epbem/trabalhos/Comunicacao_Cego_699.pdf)

Penteado, C. (2004). Concepções do professor no ensino médio relativas à densidade do conjunto dos números reais e suas relações frente a procedimentos para a abordagem desta propriedade. Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática do Curso de Mestrado Académico do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica, de São Paulo. (Disponível em http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/cristina_berndt_penteado.pdf)

Perrenoud, P. (1999). Avaliação. Da Excelência à Regulação das Aprendizagens. Porto Alegre: Artmed Editora.

Ponte, J. (2005). Gestão Curricular em Matemática. In Grupo de Trabalho de Investigação da APM., O Professor e o Desenvolvimento Curricular (pp.11-33). Lisboa: APM.

Ponte, J., Neusa, B., & Matos, A. (2009). Brochura da Álgebra. Álgebra no Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação/ DGIDC.

Pommer. W. (2012). A construção de significados dos Números Irracionais no ensino básico: Uma proposta de abordagem envolvendo os eixos constituintes dos Números Reais. Faculdade de Educação. Universidade de São Paulo. (Disponível em www.teses.usp.br/teses/.../WAGNER_MARCELO_POMMER_rev.pdf)

Quaresma, M. (2010). Ordenação e comparação de números racionais em diferentes representações: uma experiência de ensino. Dissertação de Mestrado em Educação. Área de especialização em Didática da Matemática. Instituto de Educação, da Universidade de Lisboa.

Quaresma, M. e Ponte, J. (2010). Compreensão dos números racionais, comparação e ordenação: O caso de Leonor. Trabalho realizado no âmbito do Projecto IMLNA – *Improving Mathematics Learning in Numbers and Algebra*, apoiado pela FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia.

Rowe, M. (1974). *Wait time and rewards as instructional variables, their influence on language, logic and fate. Journal of Research in Science Teaching*, 11, 81-94.

Rezende, W. (2003). O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica. Tese de Doutorado em Educação, da Universidade de São Paulo.

Santos, J. (2007). Números reais: um desafio na Educação Básica. Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Matemática para Professores de Ensino Fundamental e Médio, para a obtenção do grau de especialista. Centro de estudos gerais. Instituto de Matemática de Niterói. (Disponível em http://www.professores.uff.br/wmrezende/uploads/Monografia_Real.pdf)

Santos, J. (2011). Introdução à Topologia. Departamento de Matemática. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. (Disponível em www.fc.up.pt/mp/jcsantos/PDF/Topologia.pdf)

Santos, L. (2008). Questionamento Oral. In L. Menezes, L. Santos, H. Gomes, & C. Rodrigues, Avaliação em Matemática: Problemas e Desafios (pp. 18-22). Viseu: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Sampaio, P. (2009). Infinito, a debater no ensino secundário. Revista Iberoamericana de Educação Matemática. Dezembro de 2009, número 20, pp.79-87. (Disponível em http://www.researchgate.net/publication/40910184_Infinito_a_debater_no_ensino_secundrio!)

Serrazina, L., & Oliveira, I. (2002). O professor como investigador: Leitura crítica de investigações em educação matemática. In GTI (Org. Refletir e investigar sobre a prática profissional. (pp. 283-308). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Silva, B. & Penteado, C. (2009). Fundamentos dos números reais: concepções de professores e viabilidade de início do estudo da densidade no ensino médio. Educação Matemática, São Paulo, v.11, n.2, pp.351-371, 2009. (Disponível em revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/download/1860/1808)

Silva, A. (2011). Números reais no ensino médio. Identificando e possibilitando imagens concetuais. Tese de Doutoramento. Pontifícia Universidade católica do Rio de Janeiro. (Disponível em http://www2.dbd.puc-rio.br/pergamum/tesesabertas)

Stein, M. & Smith, M. (1998). Tarefas matemáticas como quadro para reflexão. Da investigação à Prática. (Disponível em www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fdm/textos/stein-smith%2098.pdf).

Anexos

Anexo 1 – Quadro síntese da planificação das aulas lecionadas

Quadro IV– Planificação das aulas lecionadas, da unidade dos números reais

Data (dia/mês)	**N.º de Blocos 90 min.**	**Conteúdos e Objectivos de aprendizagem**	**Experiências de aprendizagem**
19/02 Terça	0,5	**1. Números Racionais:** - Recordar a noção de número racional como um número representado por uma dízima finita ou infinita periódica; - Explorar a representação dos números racionais sobre a forma de fração e de dízima. - Resolver problemas e investigar regularidades.	- A tarefa ***“Sequência de Figuras”*** permite fazer a revisão da noção de número racional (ver Anexo 3, p. 139). Esta tarefa promove a investigação de regularidades, com vista à generalização de uma regra que permita passar qualquer dízima infinita periódica, para a forma de fração. **T.P.C** Ex.2, 3 e 4, da pág. 89 do manual.
20/02 Quarta	1	**2. Números reais:** - Identificar um número real (racional e irracional) como um número cuja representação decimal é uma dízima finita ou infinita. - Compreender que um número irracional é representado por uma dízima infinita não periódica.	- Discussão com o grupo-turma das questões 1.4 e 1.5. - A tarefa ***“Descoberta de um novo conjunto”*** (ver Anexo 3, p. 140) permite introduzir a noção de número irracional. - Os Exercícios **4**, **5** e **8** da p.97 do manual têm o intuito de consolidar a noção de número real, por meio da identificação dos números racionais e irracionais. **T.P.C.** Tarefa ***“Dízima”*** (ver Anexo 3, p.141). Ex. 1, 2 e 7 das páginas 96 e 97.
25/02 Segunda	1	**3. A Reta real:** - Representar os números reais na reta real, com aproximações apropriadas aos contextos.	- A tarefa ***“Espiral”*** (ver Anexo 3, p. 142) tem o intuito de explorar a medição de segmentos de reta cujo valor de medida é um número irracional. A tarefa ***“Reta real”*** (ver Anexo 3, p. 142) permite explorar a representação na reta real dos números reais (racionais e irracionais) e trabalhar as relações de ordem < e > em *R*. - Discussão com o grupo-turma de algumas tarefas. **T.P.C.** Ex. 11, p.101e Ex. 2 e 3, da p.122 do manual.

26/02 Terça	0,5	**4. Relações de ordem em *R*** - Comparar e ordenar os números reais. - Compreender e utilizar a transitividade das relações de ordem de > e < em *R*.	- As tarefas da ***"Comparação e ordenação de números reais"*** e ***"Desigualdades"*** (p.142) permitem compreender e utilizar a as relações de ordem de < ou > em *R*. **T.P.C.** Concluir a questão 2.2 (respeitante à ordenação dos números) da ficha de trabalho da Reta Real.
05/03 Terça	0,5	**5. Intervalos de números reais:** - Representar algebricamente (sobre uma condição) e graficamente os intervalos de números reais.	**-** Introdução da noção de intervalo de números reais. - A resolução dos Exercícios **1.1**, **1.2**, **1.5** e **1.6** (adaptados) da p.108 do manual permitem trabalhar diferentes representações dos intervalos e traduzir de uma forma para outra (Anexo 3, p. 144). **T.P.C.** Ex. 5 (adaptado) da pág. 109 do manual. Representar cada um dos conjuntos na forma de <u>intervalo</u> e <u>geometricamente</u>.
06/03 Quarta	1	**6. Interseção e reunião de intervalos de números reais:** - Interpretar e representar simbólica (algébrica) e graficamente a interseção e reunião de intervalos de números reais.	- Apresentação e discussão de exemplos de interseção e reunião de conjuntos com o grupo-turma. - Os Ex. **1** e **11**, das páginas 112 e 113 do manual permitem trabalhar a representação gráfica da interseção e reunião de conjuntos (ver Anexo 3, p.142). **T.P.C.** Ex. 6, 7 e 8, da p. 113 e Ex.9 da pág. 109, do manual. Ler as páginas 110 e 111 do manual.
11/03 Segunda	1	**7. Intervalos de números reais e Valores aproximados:** - Resolver problemas que envolvam a compreensão dos intervalos de números reais. - Representar os números irracionais com aproximações por defeito ou por excesso da soma e do produto de números reais.	- A resolução do problema ***"Perímetro dos triângulos"*** (ver Anexo 3, p.145) tem em vista que os alunos formulem conjeturas e tenham uma melhor apropriação da noção de intervalo de números reais. A resolução dos Exercícios **2.2** e **2.3**, da pág. 104 servem para consolidar a aprendizagem dos alunos sobre as relações de ordem em *R* (Anexo 3, p.145). A tarefa **"** π **"** (adaptada) da p.100 do manual permite estimar valores aproximados (por excesso e por defeito) e apreciar ordens de grandeza (ver Anexo 3, p. 145). Esta tarefa possibilita ainda uma conexão com a comparação e ordenação de números reais. **T.P.C.** Ex. 7 e 8, da p. 101, do manual.
N.º Total de Blocos	**5,5**		

Anexo 2 – Planificações das aulas

PLANO DA 1.ª AULA

Lição n.º 89 **Data:** 19/02/2013 **Hora/Duração:** 10h05-10h50/45min. **Turma:** 9.º 2
Sala: 120

TEMA: Números e Operações

Tópico: Números Reais

Subtópico: Noção de número racional

Sumário: Resolução de uma ficha de trabalho sobre números racionais.

RECURSOS:

- Ficha de trabalho;
- Máquina de calcular.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS DOS ALUNOS

- Noção de número natural, inteiro e racional.

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM:

Específicos:

- Recordar a noção de número racional como um número representado por uma dízima finita ou infinita periódica;
- Explorar a representação dos números racionais sobre a forma de fração e de dízima;
- Generalizar uma regra que permita representar qualquer dízima infinita periódica na forma de fração.
- Resolver problemas e investigar regularidades.

METODOLOGIA DE TRABALHO

- Trabalho em grupos de 2 a 4 alunos, escolhidos pelo professor.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

1.º MOMENTO – ENTRADA (10 min.) 10:05-10h15

- O professor dita e projeta o sumário.
- O professor questiona os alunos sobre se houve dúvidas, na realização do trabalho de casa.

- O professor informa os alunos sobre a metodologia de trabalho e o tempo de resolução da ficha de trabalho (cerca de 10 minutos para resolverem as duas primeiras questões e 15 minutos para resolverem as três últimas questões).
- É distribuída uma ficha por cada aluno.

2.º MOMENTO – RESOLUCÃO DAS TAREFAS E CORREÇÃO (25 min.) 10h15-10h40
- Os alunos trabalham em grupo;
- Caso existam, o professor esclarece as dúvidas sobre o trabalho de casa;
- O professor circula pela sala dirigindo-se aos alunos, tirando dúvidas pontuais e colocando-lhes questões sobre o modo como estão a pensar. Na alínea 1.4 o professor poderá questionar os alunos sobre como procederam para escrever as dízimas na forma de fração.
- O professor regista interações entre alunos, as questões que lhe são colocadas e algumas produções de alunos que considere relevantes para a discussão.
- O professor informa os alunos que ao fim de 10 minutos, as duas primeiras questões deverão estar resolvidas, para que um dos alunos possa ir ao quadro corrigi-las, enquanto que a restante turma deverá confirmar se a sua resolução está correta. Desta forma, durante o momento de correção das alíneas 1.1 e 1.2, os alunos deverão continuar a resolver a ficha de trabalho, a menos que manifestem ter dúvidas.
- Durante o momento de resolução da tarefa *"Sequência de figuras"* o professor deverá intervir questionando os alunos para que expressem melhor a sua estratégia, sem desviar a sua linha de pensamento nem validar de imediato o que estão a fazer. Podem ser colocadas questões do tipo: *"Concordas com o teu colega? Porquê? Porque achas que essa regra funciona?"* durante a resolução da alínea1.5, em que se pretende que os alunos cheguem à generalização de uma regra, que permita representar qualquer dízima infinita periódica sobre a forma de fração.

<u>Nota</u>: Devido a limitações de tempo, o momento destinado à discussão com o grupo-turma das questões 1.4 e 1.5 será retomado no início da aula seguinte.
Caso os alunos terminem mais cedo a resolução da tarefa, o professor deverá apresentar novos exemplos de dízimas, nomeadamente: 1, 4444… e 7, (135) solicitando que os alunos com melhor desempenho as escrevam sobre a forma de fração.

3º MOMENTO – ENCERRAMENTO (10 min.) 10h40-10h50
- O professor recolhe as produções escritas dos alunos e informa-os que na aula seguinte irá ocorrer um momento de discussão das questões 1.4 e 1.5.
- Marcação dos exercícios 2, 3 e 4, da página 89 do manual pi 9, volume 2, para trabalho de casa.
- O professor informa os alunos que a aula terminou e que podem arrumar os seus materiais.

FORMAS E MOMENTOS DE AVALIAÇÃO

Avaliação formativa:

Observação do trabalho dos alunos:

- Questões feitas pelos alunos
- Erros mais frequentes;
- Diferentes resoluções;
- Recolha das produções dos alunos.

PREVISÃO

Principais Aprendizagens/ Dificuldades dos alunos:

Questões 1.1, 1.2 e 1.3:

- A aprendizagem dos alunos incide sobre a revisão da noção de número racional como um número representado por uma dízima finita ou infinita periódica.

- Como a finalidade destas questões visa a consolidação de conhecimentos adquiridos previamente em anos anteriores, não se prevêem dificuldades na sua realização.

Questões 1.4 e 1.5:

- Esta tarefa promove a exploração e investigação de regularidades, com vista à generalização de uma regra que permita representar qualquer dízima infinita periódica na forma de fração.

- Os alunos poderão ter dificuldades em chegar à generalização. Prevê-se que alguns alunos tenham tendência para explorar a representação de dízimas, na forma de fração por tentativas. Outros alunos poderão ter mais facilidade em estabelecer uma conexão entre as questões 1.4 e 1.5 com as alíneas anteriores, chegando à conclusão que qualquer dízima infinita periódica pode ser representada pelo quociente do período da dízima por um número composto apenas por noves, o qual possui o mesmo número de algarismos que o período da dízima.

TRABALHO PARA CASA

Exercícios 2, 3 e 4, da pág. 89, do manual pi9, volume 2

- Estas tarefas permitem aos alunos fazer uma revisão da noção de número inteiro e de número racional.
- Como a finalidade destas questões é a de consolidar conhecimentos previamente adquiridos em anos anteriores, não se prevêem dificuldades na sua realização.

PLANO DA 2.ª AULA

Lição n.º 90 e 91 **Data:** 20/02/2013 **Hora/Duração:** 08h15-09h45/90min. **Turma:** 9.º 2
Sala: 120

TEMA: Números e Operações

Tópico: Números Reais

Subtópico: Noção de número real (racional e irracional)

Sumário:

Conclusão da ficha de trabalho sobre números racionais.

Esclarecimento de dúvidas do T.P.C.

Resolução de tarefas envolvendo a noção de número real.

RECURSOS:

- Ficha de trabalho;
- Máquina de calcular.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS DOS ALUNOS

- Noção de número natural, inteiro e racional.

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM:

Específicos:

- Identificar um número real (racional e irracional) como um número cuja representação decimal é uma dízima finita ou infinita.
- Compreender que um número irracional é representado por uma dízima infinita não periódica.

METODOLOGIA DE TRABALHO

- Trabalho em grupos de 2 a 4 alunos, escolhidos pelo professor.
- Trabalho com o grupo-turma.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

1.º MOMENTO – ENTRADA (5 min.) 08:15-08h20

- O professor dita e projeta o sumário.

- O professor questiona os alunos se tiveram dúvidas sobre o trabalho de casa e informa-os que irá esclarecê-los pontualmente, num momento posterior ao da discussão e sistematização das questões 1.4 e 1.5.

2.º MOMENTO – DISCUSSÃO E SISTEMATIZAÇÃO DAS QUESTÕES 1.4 e 1.5 (20 min.) 08:20-08h40

- São eleitos, pelo professor, os representantes que irão explicar oralmente, a projeção digitalizada das suas resoluções das alíneas 1.4 e 1.5 no quadro;
- O professor intervém para incentivar outros alunos a participar na discussão de forma a complementarem o trabalho dos colegas.
- O professor escreve no quadro as dízimas 1,444444…e 7,(135) e desafia a turma para que expliquem como procederiam para escrever estes novos números na forma de fração.
- Em síntese, o professor poderá questionar os alunos *"o que acontece se"* em vez de terem uma dízima inferior à unidade, tiverem uma dízima cujo valor é superior? E como a representariam na forma de fração?
- O professor deverá dar algum tempo (cerca de 5 minutos) para que os alunos pensem nestes dois novos exemplos.
- O professor deverá escolher também, um representante para explicar oralmente ou por escrito, no quadro, o modo como pensou.

3.º MOMENTO – APRESENTAÇÃO DAS TAREFAS PROPOSTAS (5 min.) 08:40-08h45

- O professor informa os alunos sobre a metodologia de trabalho e o tempo de resolução para a tarefa *"Descoberta de um novo conjunto"* (cerca de 15 minutos).
- É distribuída uma ficha por cada aluno.

4.º MOMENTO – REALIZAÇÃO DA TAREFA "Descoberta de um novo conjunto" E ESCLARECIMENTO DE DÚVIDAS SOBRE O T.P.C. (20 min.) 08:45-09h05

- O professor esclarece pontualmente os alunos que tenham tido dúvidas no trabalho de casa.
- Como se prevê que vários alunos possam ter dúvidas quanto à definição de número racional e de número irracional, apresentado no quadro da ficha de trabalho, o professor deverá, antes dos alunos iniciarem a resolução das tarefas, solicitar a um dos alunos que leia o quadro em voz alta e deverá discuti-lo, em grande grupo o significado destes dois tipos de números. Prevê-se que a noção de "razão" possa levantar dúvidas por parte de alguns alunos.
- Os alunos trabalham em grupo;
- O professor circula pela sala dirigindo-se aos alunos, tirando dúvidas pontuais e colocando-lhes questões sobre o modo como estão a pensar;

- O professor regista interações entre alunos, as questões que lhe são colocadas e algumas produções de alunos que considere relevantes para a discussão.
- O professor informa os alunos que ao fim de 15 minutos, a tarefa deverá estar resolvida, para que possa ser discutida com o grupo-turma num momento seguinte.

5.º MOMENTO – DISCUSSÃO DA TAREFA "Descoberta de um novo conjunto" (20 min.) 09:05-09h25

- É eleito, pelo professor, o aluno que irá corrigir a tarefa no quadro;
- O professor intervém para incentivar outros alunos a participar na discussão de forma a complementarem o trabalho dos colegas e promover uma discussão mais rica solicitando justificações fundamentadas.
- Depois de um representante ter corrigido no quadro a questão 1.2 o professor lançará a seguinte questão para toda a turma *"Que tipo de números são estes?"*. Os alunos deverão concluir que esses números terão de ser o quociente entre dois números que sejam quadrados perfeitos.
- Após a correção da tarefa "*Descoberta de um novo conjunto*" o professor deverá chamar a atenção dos alunos para as limitações que existem, ao afirmar se um número é ou não irracional. Os alunos deverão compreender que a máquina de calcular não permite decidir a irracionalidade de um número, dada a sua limitação de casas decimais.
- No final deste momento o professor deverá aproveitar para rever o significado dos conjuntos *N, Z, Q* e introduzir o novo conjunto dos reais, representado por *R*.

6.º MOMENTO – CONTINUAÇÃO DA REALIZAÇÃO DAS TAREFAS PROPOSTAS (15 min.) 09:25-09h40

- O professor informa os alunos que deverão continuar a resolver as tarefas pela seguinte ordem: 8, 5 e 4, da página 97, do manual pi9.
- O professor circula pela sala dirigindo-se aos alunos, tirando dúvidas pontuais e colocando-lhes questões sobre o modo como estão a pensar.

<u>Nota</u>: Caso não haja tempo para a resolução da questão 4, da pág. 97 do manual, ficará para trabalho de casa.

7.º MOMENTO – ENCERRAMENTO (5 min.) 09:40-09h45

- O professor distribui e marca para trabalho de casa a tarefa "Dízima".
- Marcação dos exercícios 1, 2 e 7 da página 96 e 97 do manual pi 9, volume 2, para trabalho de casa.
- O professor informa os alunos que a aula terminou e que podem arrumar os seus materiais.

PREVISÃO

Principais Aprendizagens/ Dificuldades dos alunos:

Tarefa "Descoberta de um novo conjunto":

- A aprendizagem dos alunos incide sobre a identificação de um número real (racional e irracional) como um número cuja representação decimal é uma dízima finita ou infinita. Com esta tarefa os alunos deverão ser capazes de compreender que um número irracional é representado por uma dízima infinita não periódica.

- Na questão 1.1 uma vez que a noção de número racional já foi trabalhada na aula anterior, os alunos não deverão revelar dificuldades em perceber que todo o número racional pode ser representado por uma dízima finita ou infinita periódica e que este se escreve sobre a forma $\frac{m}{n}$, sendo m e n números inteiros e $n \neq 0$. Prevê-se que alguns alunos evidenciem dificuldades na compreensão da noção de número irracional, procurando identificá-lo com recurso à máquina de calcular.
- Na questão 1.2 prevê-se que os alunos não tenham dificuldade em dar exemplos de números racionais cujas raízes quadradas sejam um número real. No entanto, quando confrontados com a pergunta "Que tipo de números são estes?" ou que "Característica tem de ter esse número racional para que a sua raiz quadrada seja um número racional?", prevê-se revelem algumas dificuldades em compreender que o seu numerador e denominador deste tipo de números racionais teriam de ser quadrados perfeitos.

Tarefas 8, 5 e 4 do manual pi9, volume 2

- Com estas tarefas pretende-se que os alunos consolidem a noção de número real, por meio da identificação de números racionais e irracionais. Pretende-se também, que os alunos revisitem as noções de número natural, inteiro e racional, identificando os números que pertencem a cada um dos respetivos conjuntos.

- Os alunos poderão revelar dificuldades em distinguir números racionais de números irracionais. Para além disso, com estas tarefas os alunos deverão ser confrontados com as suas dificuldades, afim de compreenderem que a máquina de calcular não permite determinar a irracionalidade de um dado número real.

TRABALHO PARA CASA

Tarefa "Dízima"

- Com esta tarefa pretende-se levar os alunos a compreender que a máquina de calcular não permite decidir a irracionalidade de um número, dada a sua limitação de casas decimais.

- Nesta tarefa não se prevêem quaisquer dificuldades na identificação da fração $\frac{368}{491}$ como um número racional. No entanto, os alunos poderão revelar algumas dificuldades em assinalar (sublinhando) a *"descoberta"* do período desta dízima.

Exercícios 1, 2 e 7, das páginas 96 e 97, do manual pi9, volume 2

- Estas tarefas permitem aos alunos fazer uma revisão da noção de número real (racional e irracional).

- Como a finalidade destas questões consiste na consolidação de conhecimentos, não se prevêem dificuldades na sua realização.

PLANO DA 3.ª AULA

Lição n.º 92 e 93 **Data:** 25/02/2013 **Hora/Duração:** 10h05-11h35/90min. **Turma:** 9.º 2
Sala: 120

TEMA: Números e Operações

Tópico: Números Reais

Subtópico: Reta Real

Sumário:

- Clarificação da noção de número real.
- Discussão e correção da tarefa "Dízima".
- Início da resolução da ficha de trabalho da Reta Real.

RECURSOS:

- Ficha de trabalho.
- Máquina de calcular.
- Material de desenho e de medição de quadro (compasso, régua e esquadro).

CONHECIMENTOS PRÉVIOS DOS ALUNOS

- Identificar um número real (racional e irracional).
- Representar números racionais na reta numérica.

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM:

Específicos:

- Representar números reais (racionais e irracionais) na reta real.
- Ordenar números reais a partir da sua representação na reta numérica.

METODOLOGIA DE TRABALHO

- Trabalho com o grupo-turma.
- Trabalho em grupos (de 2 a 4 alunos), escolhidos pelo professor.

DESENVOLVIMENTO DA AULA

1.º MOMENTO – ENTRADA (10 min.) 10:05-10h15

- O professor dita e projeta o sumário.
- O professor questiona os alunos sobre se houve dúvidas, na realização do trabalho de casa.

2.º MOMENTO – CLARIFICAÇÃO DA NOÇÃO DE NÚMERO REAL (RACIONAL E IRRACIONAL) (10 min.) 10:15-10h25

- O professor clarifica algumas noções teóricas abordadas nas aulas anteriores.
- O professor pede a colaboração do grupo-turma para clarificar um exemplo relativo à identificação e representação do período da dízima.

3.ª MOMENTO – DISCUSSÃO E CORREÇÃO DA TAREFA "Dízima" (T.P.C.) (5 minutos) 10:25-10h30

- O professor questiona o grupo-turma se a dízima apresentada é um número racional ou irracional.
- Na aula anterior dois grupos iniciaram a resolução desta tarefa, tendo um deles concluído de imediato que se era um número racional. Outro grupo de trabalho revelou ter algumas dificuldades, referindo que devido ao facto do número de algarismos da dízima ser infinito e não haver repetição de um padrão de algarismos, esta dízima seria infinita não periódica, e portanto concluíram que era um número irracional. Assim sendo, o professor deverá questionar o grupo que revelou ter dificuldades sobre se a sua conclusão se mantém, pois uma vez que esta tarefa tinha ficado para trabalho de casa, tiveram o tempo suficiente para repensar nela.
- Outros grupos poderão interpolar, e apresentar o modo como pensaram, justificando e argumentando as suas conclusões.
- Após o grupo-turma compreender que o número é racional, devido à sua forma de representação, o professor deverá questionar os alunos sobre se alguém conseguiu descobrir qual o período da dízima, assinalando-o.
- O professor projeta a correção desta tarefa no quadro.

4.º MOMENTO – RESOLUÇÃO DA TAREFA "Espiral" (10 minutos) 10:30-10h40

- Os alunos iniciam o trabalho em grupo.
- O professor circula pela sala, tirando dúvidas pontuais dos alunos.
- Os alunos deverão compreender que a medida do comprimento da hipotenusa do triângulo retângulo que se segue, na construção da espiral, corresponde à raiz quadrada da hipotenusa do triângulo retângulo anterior somado com uma unidade.
- Os alunos poderão revelar ter dúvidas na distinção de números racionais e irracionais, devido ao facto de todos estes números estarem representados sobre a forma de raiz.

5.º MOMENTO – DISCUSSÃO DA TAREFA "Espiral" (10 minutos) 10:40-10h50

- O professor inicia a discussão da tarefa "Espiral" em grande-grupo, pedindo a colaboração dos alunos para explicarem oralmente como procederam para resolver esta tarefa e as dificuldades que tiveram. Os alunos deverão evidenciar que utilizaram o "Teorema de Pitágoras" (já trabalhado em aulas anteriores) para descobrir as medidas dos comprimentos das hipotenusas.

- O professor irá corrigir no quadro, com a colaboração do grupo turma, as quatro primeiras hipotenusas (a, b, c e d) e questionar os alunos sobre o que está a acontecer. Os alunos deverão compreender que, como estão sempre a adicionar ao quadrado de um dos catetos, o quadrado do cateto de valor unitário, isto é 1^2, a determinação do valor das hipotenusas seguintes seguem um raciocínio análogo.
- Prevê-se que este momento de discussão contribua para os alunos compreenderem na tarefa seguinte como deverão proceder para marcar a raiz quadrada de 2 ou a raiz quadrada de 5 na reta real.

6. º MOMENTO – APRESENTAÇÃO DE EXEMPLOS DE MARCAÇÃO DE NÚMEROS NA RETA REAL (10 minutos) 10:50-11h00
- Neste momento o professor deve procurar fazer com que os alunos compreendam que "dada a origem e uma unidade de medida, cada ponto de uma reta corresponde a um número real e vice-versa", de acordo com o NCTM (2007, p.348).
- O professor recorda como se representam números racionais na reta real, dando como exemplo a marcação de $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{3}$.
- O professor exemplifica como se representa o número irracional $\sqrt{2}$ na reta real, fazendo referência à tarefa "Espiral".

7.º MOMENTO – RESOLUCÃO DA QUESTÃO 2.1 E DE ALGUNS EXEMPLOS DA QUESTÃO 2.2 COM O GRUPO-TURMA (20 min.) 11:00-11h20
- O professor informa os alunos que na questão 2.1 deverão começar por identificar os seis pontos assinalados na reta por A, B, C, D, E e F.
- O professor inicia a resolução em grande grupo da questão 2.1, pedindo a colaboração dos alunos para explicarem como procederiam para resolver esta tarefa.
- Neste momento o professor deverá incentivar a participação dos alunos, de forma a que estes complementem o trabalho dos colegas.
- Relativamente à questão 2.2 o professor o professor poderá solicitar a um aluno que venha ao quadro ajudar a representar os valores exatos de $\frac{1}{3}$ e $\sqrt{5}$.

Nota: As tarefas 3 e 4 da ficha de trabalho serão resolvidas na aula seguinte.

8.º MOMENTO – CONTINUAÇÃO DA RESOLUÇÃO DA QUESTÃO 2.2 E ENCERRAMENTO (15 min.) 11h20-11h35

- Os alunos continuam a trabalhar em grupo para resolverem a questão 2.2.
- O professor deverá circular pela sala, tirando as restantes dúvidas dos alunos.
- Marcação do exercício 11, da pág. 101 e dos exercícios 2 e 3 da pág. 122 do manual pi 9, volume 2, para trabalho de casa.
- O professor recolhe as produções escritas dos alunos.

FORMAS E MOMENTOS DE AVALIAÇÃO

Avaliação formativa:

Observação do trabalho dos alunos:

- Questões feitas pelos alunos
- Erros mais frequentes;
- Diferentes resoluções;
- Recolha das produções dos alunos.

PREVISÃO

Principais Aprendizagens/ Dificuldades dos alunos:

1.ª Tarefa – "Espiral"

- Com esta tarefa pretende-se que os alunos consigam desenvolver a sua capacidade de distinguir números racionais de irracionais e que consolidem também a sua aprendizagem sobre o teorema de Pitágoras.
- A partir da construção da Espiral, pretende-se que os alunos saibam na tarefa seguinte, como deverão proceder para representar na reta real números que se apresentem sobre a forma de um radical.

- Na 1.ª tarefa, embora os números racionais e irracionais já tenham sido trabalhados na aula anterior, prevê-se que os alunos possam ainda assim revelar dificuldades na identificação da natureza deste tipo de números, pelo facto de serem apresentados sobre a forma de raiz.

2.ª Tarefa – "Reta real"

- Esta tarefa permite que aos alunos compreender que "dada a origem e uma unidade de medida, cada ponto de uma reta corresponde a um número real e vice-versa", de acordo com o NCTM (2007, p.348).

- Com esta tarefa pretende-se que os alunos sejam capazes de identificar na forma de dízima e de fração a abcissa de pontos assinalados na reta real e que consigam proceder à marcação de números na reta real.

- Relativamente à 2.ª tarefa prevê-se que os alunos evidenciem dificuldades em indicar na forma de fração, dízimas cujo seu valor seja superior à unidade. Prevê-se também que os alunos não se recordem do modo como procediam em anos anteriores, para dividir a unidade, em 3 partes iguais, na marcação de $\frac{1}{3}$. A marcação na reta real de $\sqrt{5}$ também poderá suscitar algumas dúvidas.

TRABALHO PARA CASA

Ex. 11, da pág. 101 e Exercícios 2 e 3 da pág. 122

- Estas tarefas permitem aos alunos consolidar os seus conhecimentos sobre a representação de números (racionais e irracionais) na reta real.

- Prevê-se que os alunos revelem algumas dificuldades na representação de números reais, com operações entre eles.
- Como alguns dos exemplos apresentados são números irracionais semelhantes aos trabalhados durante a aula, prevê-se que os alunos consigam consolidar os seus conhecimentos.

PLANO DA 4.ª AULA

Lição n.º 94 **Data:** 26/02/2013 **Hora/Duração:** 10h05-10h50/45min. **Turma:** 9.º 2
Sala: 120

TEMA: Números e Operações
Tópico: Números Reais
Subtópico: Relação de ordem em *R*

Sumário:
- Conclusão da resolução da ficha de trabalho sobre a Reta Real: comparação e ordenação de números reais. Estudo das relações de ordem em *R*.

RECURSOS:
- Ficha de trabalho;
- Máquina de calcular.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS DOS ALUNOS
- Ordenar números reais a partir da sua representação na reta numérica (aula anterior).

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM:
<u>Específicos</u>:
- Comparar e ordenar os números reais (racionais e irracionais).
- Compreender e utilizar a transitividade das relações de ordem de > e < em *R*.

METODOLOGIA DE TRABALHO
- Trabalho com o grupo-turma.
- Trabalho em grupos (de 2 a 4 alunos), escolhidos pelo professor (mantendo-se os grupos habituais).

DESENVOLVIMENTO DA AULA

1.º MOMENTO – ENTRADA (10 min.) 10:05-10h15
- O professor dita e projeta o sumário.

- O professor questiona os alunos sobre se houve dúvidas, na realização do trabalho de casa e esclarece dúvidas que surgiram na aula anterior, em particular relativas à marcação do número irracional $\sqrt{5}$, na reta real.
- O professor distribui as fichas de trabalho pelos alunos.

2.º MOMENTO – RESOLUÇÃO DAS 3.ª E 4.ª TAREFAS DA FICHA DE TRABALHO. (15 min.) 10:15-10h30

- O professor retira dúvidas sobre o trabalho de casa.
- O professor informa os alunos que terão 15 minutos para resolver as 3.ª e 4.ª tarefas.
- Os alunos trabalham em grupo, de forma autónoma, enquanto o professor vai prestando apoio aos grupos para tirar algumas dúvidas, observar o progresso do trabalho dos alunos, com vista a poder escolher quais os representantes que irão ao quadro apresentar as suas estratégias no momento de discussão.
- O professor não fará a correção no quadro da tarefa 3, devendo as dúvidas dos alunos serem esclarecidas pelo professor no lugar.
- O professor deve procurar incentivar os grupos que estiverem parados nalguma questão a recomeçar o seu pensamento de outra forma ou a explorarem vários caminhos; por exemplo na tarefa 4, caso os alunos revelem ter dificuldades, o professor poderá sugerir que experimentem substituir o a e b por números (ora positivos, ora negativos) e fazerem experiências.
- São eleitos, pelo professor, os representantes para a correção no quadro da 4.ª tarefa.

3.º MOMENTO – DISCUSSÃO E CORREÇÃO DA TAREFA "Desigualdades" (10 minutos) 10:30-10h40

- O professor pede a um representante de um dos grupos que vá ao quadro, corrigir e explicar o modo como procedeu para resolver a questão 4.1.
- O professor deverá incentivar os grupos a participar na discussão de forma a complementarem o trabalho dos colegas e apresentarem, caso existam, resoluções alternativas.
- O professor irá solicitar ao mesmo representante, ou a outro aluno que revele ter uma resolução interessante para ir ao quadro resolver a questão 4.2, de acordo com a observação direta realizada no momento anterior.

4. º MOMENTO – SISTEMATIZAÇÃO DO ESTUDO DA RELAÇÃO DE ORDEM EM *R* (5 minutos) 10:40-10h45

- O professor apresenta alguns exemplos sobre as propriedades das relações de ordem em R e solicita a participação oral dos alunos, num exemplo concreto real, em que se pretende que os alunos compreendam e utilizem as relações de transitividade em *R*.

5º MOMENTO – ENCERRAMENTO (5 min.) 10:45-10:50

- Marcação dos exercícios 3 e 4, da página 104, do manual pi 9, volume 2, para trabalho de casa.
- O professor recolhe as produções escritas dos alunos.

FORMAS E MOMENTOS DE AVALIAÇÃO

Avaliação formativa:

Observação do trabalho dos alunos:

- Questões feitas pelos alunos
- Erros mais frequentes;
- Diferentes resoluções;
- Recolha das produções dos alunos.

PREVISÃO

Principais Aprendizagens/ Dificuldades dos alunos:

3.ª Tarefa – Comparação e Números

- Com esta tarefa pretende-se que os alunos desenvolvam a sua capacidade para comparar números reais. Caso os alunos revelem dificuldades em ordenar dois números inteiros negativos, o professor poderá sugerir que escrevam os números na forma de dízima e acrescentem casas decimais, por exemplo, 0,519 e 0,530 lendo 519 milésimas e 530 milésimas.

- Alguns alunos poderão revelar dificuldades em comparar dízimas finitas com dízimas infinitas não periódicas, devido aos seus valores serem parecidos, num determinado número de algarismos.

4.ª Tarefa – Desigualdades

- Esta tarefa permite que os alunos desenvolvam a sua capacidade de compreensão na utilização da transitividade das relações de ordem < e de > em *R*.
- A questão 4.1 tem uma dificuldade acrescida, devido ao facto de se tratar de uma generalização. Assim sendo, o professor poderá sugerir que os alunos experimentem vários valores, positivos ou negativos para a e b.

TRABALHO PARA CASA

Ex. 3 e 4, da pág. 104 do manual pi 9, volume 2.

- Estas tarefas permitem aos alunos consolidar as suas aprendizagens sobre o estudo das relações de ordem em *R*.
- Como estas tarefas são de consolidação, não se prevêem dificuldades acrescidas por parte dos alunos.

PLANO DA 5.ª AULA

Lição n.º 99 **Data:** 05/03/2013 **Hora/Duração:** 10h05-10h50/45min. **Turma:** 9.º 2
Sala: 120

TEMA: Números e Operações
Tópico: Números Reais
Subtópico: Intervalos de números reais

Sumário: Intervalos de números reais.

RECURSOS:
- Régua;
- Manual pi9, volume 2.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS DOS ALUNOS
- Noção de número real.
- Marcação de números reais na reta real.

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM:
<u>Específicos</u>:
- Compreender os intervalos como subconjuntos de *R*.
- Representar e interpretar intervalos de números reais na forma simbólica (na forma de intervalo ou por meio de uma condição) e gráfica (também denominada de representação geométrica).

METODOLOGIA DE TRABALHO
- Trabalho com o grupo-turma.
- Trabalho autónomo dos alunos em pequenos grupos (de 2 a 3 alunos).

DESENVOLVIMENTO DA AULA

1.º MOMENTO – ENTRADA (5 min.) 10:05-10h10
- O professor dita e projeta o sumário.

2.º MOMENTO – ESTUDO DOS INTERVALOS DE NÚMEROS REAIS (20 min.) 10h10-10h30

- O professor lança a questão para a turma *"Dados dois números, por exemplo o 2 e 3, quantos números reais se encontram entre eles?"*. Espera-se que os alunos respondam infinitos. O professor deverá perguntar *"Porquê?" "Conseguem-me explicar como pensaram?"*.

- Os alunos poderão começar por experimentar dividir a unidade em duas partes iguais (obtendo dois segmentos), referindo então que existe o número 2,5 entre eles. Poderão também dizer que dividindo o 1.º segmento novamente em duas partes iguais, obtém o número 2,25 e assim sucessivamente. Outros alunos poderão concluir que, como é sempre possível dividir uma unidade num número infinito de segmentos, então existem infinitos números entre eles.

- Assim, para representar o conjunto de números compreendidos entre 2 e 3, o professor deverá partir da representação gráfica, apresentando os quatro casos possíveis para a representação dos intervalos limitados de 2 a 3, sendo estes os seguintes: ambos os extremos 2 e 3 não pertencem ao intervalo; ambos os extremos 2 e 3 pertencem ao intervalo, 2 pertence ao intervalo e o 3 não pertence, 2 não pertence ao intervalo e 3 pertence.

- De seguida o professor irá apresentar na forma de intervalo e em compreensão cada uma das representações geométricas apresentadas. Na representação intervalar o professor deverá chamar a atenção para o significado do parêntesis reto: que voltado para dentro significa que inclui o extremo e voltado para fora, que exclui o respetivo extremo. Assim sendo, na representação na forma de intervalo o professor deverá referir que: $[2,3]$ é o intervalo que representa todos os números maiores ou iguais a 2 e menores ou iguais a 3, $]2,3[$ representa todos os números maiores que 2 e menores que 3, [2, 3[representa todos os números maiores ou iguais a 2 e menores que 3 e]2, 3] representa todos os números maiores que a 2 e menores ou iguais a 3. O professor deverá referir que todos os intervalos deste tipo dizem-se *"limitados"*.

- Paralelamente à introdução das formas de representação geométrica e na forma de intervalo, o professor irá apresentar também a forma de representação em compreensão, referindo que se começa por escrever na forma de chaveta as condições que fazem com que os números pertençam a esse intervalo. Por exemplo, o intervalo de$]2,3]$ representa o conjunto dos elementos x pertencentes a *R*, tais que x são maiores que 2 e menores ou iguais a 3.

- Posteriormente o professor deverá informar o grupo-turma que existem um outro tipo de intervalos, "*os intervalos ilimitados"* e esclarecer que este tipo de intervalos não tem: ou extremo superior, ou extremo inferior ou ambos os extremos. Neste momento, o professor deverá introduzir a noção de infinito e poderá questionar o grupo-turma relativamente, ao que pensam ser o seu significado.

- Os alunos deverão compreender de modo indutivo a noção de infinito, percebendo que ao escolher um número tão grande quanto se queira é sempre possível adicionar uma unidade a esse número e assim sendo os números obtidos serão sucessivamente maiores, chegando deste modo à noção de infinito, isto é, de "algo" ilimitado. O professor deverá então apresentar quatro novos exemplos de conjuntos, sendo dois deles ilimitados à direita, e os outros dois ilimitados à esquerda. Neste momento deverão ser introduzidos os símbolos que representam o mais infinito e o menos infinito. Para além disso, o professor deverá apresentar um 5.º exemplo relativo a um intervalo ilimitado à esquerda e à direita, o qual representa justamente o conjunto dos números reais, *R*.

- À medida que surgem os exemplos, na representação geométrica o professor deverá ter o cuidado de referir que se o intervalo for fechado num dos extremos a sua representação deverá ser uma bola fechada ou a cheio, ou se pelo contrário o extremo for aberto, a representação desse extremo deverá ser uma bola aberta (sem preenchimento).

3.º MOMENTO – REALIZAÇÃO DE TAREFAS (15 min.) 10h30-10h45

- O professor propõe a realização dos exercícios 1.1, 1.2, 1.5, e 1.6 da página 108, do manual pi9, volume 2, solicitando que os alunos representem estes quatro intervalos geometricamente e em compreensão.
- O professor solicita aos alunos a resolução destas tarefas numa folha à parte, para entregarem no final da aula.
- Os alunos trabalham em grupo.
- O professor circula pela sala dirigindo-se aos grupos, tirando dúvidas pontuais.
- O professor regista algumas das interações entre os alunos e as questões que lhe são colocadas.

<u>Nota:</u> Caso haja alunos que terminem a resolução dos quatro exercícios propostos mais cedo, o professor poderá sugerir, que resolvam as questões 2.1, 2.2 e 2.3 da pág. 108, do manual pi9.

4º MOMENTO – ENCERRAMENTO (5 min.) 10h45-10h50

- O professor informa os alunos que na aula seguinte irão continuar a trabalhar os intervalos de números reais e que irá tirar possíveis dúvidas que ainda se mantenham.
- Marcação do exercício 5, da página 109 do manual pi 9, volume 2, para T.P.C.

FORMAS E MOMENTOS DE AVALIAÇÃO

Avaliação formativa:

Observação do trabalho dos alunos:

- Questões feitas pelos alunos;
- Erros e dificuldades mais frequentes;
- Diferentes resoluções.
- Recolha de produções escritas.

PREVISÃO

Principais Aprendizagens/ Dificuldades dos alunos:

Questões 1.1, 1.2, 1.5 e 1.6 (pág.108 do manual):

- A aprendizagem dos alunos incide na tradução da representação na forma de intervalo para as representações geométrica e em compreensão.

- Os alunos poderão evidenciar dificuldades na compreensão de que parêntesis reto voltado para dentro inclui o extremo, sendo representado por uma bola fechada na representação geométrica e que o parêntesis voltado para fora exclui o respetivo extremo, sendo por isso representado por uma bola aberta. Na representação em compreensão dos intervalos, prevê-se que os alunos possam também revelar algumas dificuldades, relativamente à escrita correta de alguma simbologia.

Questões 2.1, 2.2 e 2.3 (pág. 108 do manual):

- A aprendizagem dos alunos incide na tradução da representação geométrica de números reais para a forma de representação intervalar e em compreensão.

- Não se prevê dificuldades acrescidas na resolução destes exercícios. Uma vez que se os alunos já tiverem resolvido as questões anteriores com compreensão, estes exercícios servirão apenas de consolidação, na leitura de informação e na tradução da representação na forma geométrica para a forma de intervalo. Na representação em compreensão dos intervalos, prevê-se que os alunos possam revelar algumas dificuldades, relativamente à escrita correta de alguma simbologia.

TRABALHO PARA CASA

Exercício 5, da pág. 109, do manual pi9, volume 2

- Com este exercício pretende-se que os alunos se familiarizem com a representação algébrica de intervalos de números reais. Pretende-se também que sejam capazes de representar na forma de intervalo cada uma das condições apresentadas.

- Os alunos poderão revelar dificuldades em compreender o símbolo $\leq$, de menor ou igual usado representação algébrica, significa que todos os números do intervalo deverão ser menores ou iguais a um dado número real, e que por essa razão o extremo pertencerá ao respetivo intervalo, sendo representado por um parênteses reto voltado para dentro. O caso do uso do símbolo de $\geq$ é análogo.

PLANO DA 6.ª AULA

Lição n.º 100 e 101 **Data:** 06/03/2013 **Hora/Duração:** 08h15-09h45/90min. **Turma:** 9.º 2
Sala: 120

TEMA: Números e Operações

Tópico: Números Reais

Subtópico: Interseção e reunião de intervalos de números reais.

Sumário:

- Esclarecimento de dúvidas e correção do T.P.C.
- Interseção e reunião de intervalos.

RECURSOS:

- Régua;
- Lápis de cor;
- Manual pi9, volume 2.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS DOS ALUNOS

- Noção de número real (racional e irracional).
- Compreender os intervalos como subconjuntos de *R*.
- Representar e interpretar intervalos de números reais na forma simbólica e gráfica.

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM:

Específicos:

- Representar e interpretar a interseção e reunião de intervalos de números reais na forma simbólica e gráfica.

METODOLOGIA DE TRABALHO

- Trabalho com o grupo-turma.
- Trabalho autónomo dos alunos em grupo (a pares ou em pequenos grupos).

DESENVOLVIMENTO DA AULA

1.º MOMENTO – ENTRADA (15 min.) 08:15-08h30

- O professor dita e projeta o sumário.

- O professor verifica a realização do trabalho de casa dos alunos, e questiona-os para a existência de dúvidas.
- O professor projeta a correção do ex. 1, da pág. 108 do manual, resolvida por um aluno e esclarece alguns erros comuns do grupo-turma.
- O professor projeta a correção da representação geométrica do ex. 5, da pág. 109 do manual, que foi pedida na aula anterior para trabalho de casa e que não está nas soluções.

2.º MOMENTO – ESTUDO DA INTERSEÇÃO E REUNIÃO DE INTERVALOS DE NÚMEROS REAIS (30 min.) 08:30-09h00

- O professor relembra a reunião e interseção de dois conjuntos através de exemplos com conjuntos de números inteiros. Deste modo, os alunos deverão relembrar que da interseção de dois conjuntos se obtém os elementos que pertencem simultaneamente a ambos e que a partir da reunião de dois conjuntos se obtém todos os elementos que pertencem a pelo menos um deles.
- O professor projeta alguns exemplos da interseção e reunião de intervalos e questiona o grupo-turma sobre como procederiam para resolver esses exemplos, antes de lhes serem apresentadas as respetivas soluções.
- Posteriormente o professor projeta um exemplo em que se espera que os alunos concluam que a sua interseção é o conjunto vazio, devido ao facto destes dois intervalos não terem quaisquer elementos em comum.
- O professor informa os alunos que deverão resolver os exercícios 1 e 11 das páginas 112 e 113 do manual, numa folha à parte para entregarem no final da aula.

3.º MOMENTO – RESOLUÇÃO DAS TAREFAS PROPOSTAS (35 min.) 09:00-09h35

- Os alunos trabalham em grupo.
- Excepcionalmente o professor não irá impor um tempo fixo de trabalho, uma vez que os alunos desta turma têm revelado ter ritmos de trabalho muito diferentes.
- O professor irá prestar apoio aos grupos que revelem ter dúvidas ou dificuldades.
- O professor poderá questionar alguns alunos sobre o modo como estão a pensar, durante a resolução do exercício 11, da pág. 113, uma vez que esta tarefa envolve implicitamente a consolidação da noção de número irracional.
- Como a correção das tarefas propostas se encontram nas soluções do livro, não se prevê a sua correção no quadro.
- O momento de realização do trabalho autónomo dos alunos não deverá ser interrompido, a menos que todos os alunos revelem ter a mesma dificuldade.

Nota: Caso haja alunos que terminem a resolução dos exercícios propostos mais cedo, o professor deverá solicitar que resolvam os exercícios 2 e 3 da pág. 112 do manual.

4.º MOMENTO – ENCERRAMENTO (10 min.) 09:35-09h45

- Marcação dos exercícios 6, 7 e 8 da página 113 e 9 da pág. 109, do manual pi 9, volume 2, para trabalho de casa.
- O professor recolhe as produções escritas dos alunos.

FORMAS E MOMENTOS DE AVALIAÇÃO

Avaliação formativa:

Observação do trabalho dos alunos:

- Questões feitas pelos alunos
- Erros mais frequentes;
- Diferentes resoluções;
- Recolha de produções escritas pelos alunos.

PREVISÃO

Principais Aprendizagens/ Dificuldades dos alunos:

Exercícios 1, 2, 3 e 11, das páginas 112 e 113 do manual.

- Estes exercícios visam a consolidação da representação de conjuntos na forma de interseção e reunião de intervalos. O Exercício 11 pretende que os alunos reforcem a sua compreensão da noção de número irracional.

- Como os exercícios propostos visam a consolidação das aprendizagens dos alunos, não se prevê dificuldades acrescidas.

PLANO DA 7.ª AULA

Lição n.º 102 e 103 **Data:** 11/03/2013 **Hora/Duração:** 10h05-11h35/90min. **Turma:** 9.º 2
Sala: 120

TEMA: Números e Operações

Tópico: Números Reais

Subtópicos: Intervalos de números reais e valores aproximados.

Sumário:

- Resolução da tarefa "Perímetro do triângulo".
- Inicio do estudo dos valores aproximados.

RECURSOS:

- Máquina de calcular;
- Manual pi9, volume 2.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS DOS ALUNOS

- Noção de número real (racional e irracional).
- Representar e interpretar de intervalos de números reais na forma simbólica e gráfica.

OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM:

Específicos:

- Resolução de problemas envolvendo intervalos de números reais.
- Estimar valores aproximados e apreciar ordens de grandeza.

METODOLOGIA DE TRABALHO

- Trabalho com o grupo-turma.
- Trabalho autónomo dos alunos em grupo (a pares ou em pequenos grupos).

DESENVOLVIMENTO DA AULA

1.º MOMENTO – ENTRADA (10 min.) 10:05-10h15

- O professor dita e projeta o sumário.
- O professor verifica pontualmente a realização do trabalho de casa dos alunos, e questiona-os para a existência de dúvidas.

2.º MOMENTO – RESOLUÇÃO E DISCUSSÃO DA TAREFA "Perímetro do Triângulo" (20 min.) 10h:15-10h35

- O professor informa os alunos que têm 10 minutos para resolver a tarefa "Perímetro do triângulo".
- O professor solicita aos alunos a resolução destas tarefas numa folha à parte, para entregarem no final da aula.
- Os alunos trabalham em grupo.
- O professor irá prestar apoio aos grupos que revelem ter dúvidas ou dificuldades, e poderá colocar questões sobre o modo como estão a pensar, por exemplo, que estratégia adotaram na determinação da incógnita x.
- O professor discute com o grupo-turma a resolução deste problema e incentiva os alunos à sua participação oral.

3.º MOMENTO – RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS DO MANUAL (25 min.) 10:35-11h00

- O professor informa os alunos que têm 15 minutos para resolver os exercícios 2.2 e 2.3 da pág.104 e o ex. 1 adaptado da pág. 100 do manual pi9, vol.2.
- O professor solicita aos alunos a resolução destas tarefas numa folha à parte, para entregarem no final da aula.
- Os alunos trabalham em grupo.
- O professor circula pela sala dirigindo-se aos grupos, tirando dúvidas pontuais.
- O professor regista algumas das interações entre os alunos e as questões que lhe são colocadas.
- O professor discute com o grupo-turma a resolução dos exercícios propostos e incentiva os alunos à sua participação oral.

4.º MOMENTO – MARCAÇÃO DO T.P.C. (5 min.) 11:00-11h05

- Marcação dos exercícios 7 e 8 da página 101 do manual pi9, vol.2, para trabalho de casa.
- O professor recolhe as produções escritas dos alunos.

5.º MOMENTO – ENTREGA E CORREÇÃO DOS TESTES. ENCERRAMENTO (30 min) 11:05-11h35

- Este momento destina-se à entrega e correção dos testes.

FORMAS E MOMENTOS DE AVALIAÇÃO

Avaliação formativa:

Observação do trabalho dos alunos:

- Questões feitas pelos alunos
- Erros mais frequentes;

- Diferentes resoluções;
- Recolha de produções escritas pelos alunos.

PREVISÃO

Principais Aprendizagens/ Dificuldades dos alunos:

Tarefa "Perímetro do triângulo"

- Com este problema pretende-se estabelecer a ponte entre tópico dos números reais (pertencente ao tema dos Números e Operações) e as inequações (pertencente ao tema da Álgebra). Os alunos deverão evidenciar com a resolução desta tarefa a compreensão dos intervalos de números reais, estudados anteriormente.

- Nesta tarefa não se prevê dificuldades acrescidas. Os alunos poderão evidenciar diversas estratégias, prevendo-se ser a mais comum a estratégia de resolução por meio de tentativa-erro. Outros alunos poderão intuitivamente estabelecer uma relação entre "a inequação obtida" e a resolução de equações (já conhecidas).

Exercícios 2.2 e 2.3, da pág. 104 do manual pi9

- Com este exercícios pretende-se que os alunos consolidem os seus conhecimentos sobre as relações de ordem em *R.*

- Como este exercício visa a consolidação das aprendizagens dos alunos não se prevê dificuldades. No entanto, pretende-se com a resolução desta tarefa reforçar a ideia de que quando se multiplica ou divide por um mesmo número negativo ambos os membros de uma desigualdade, o sentido da desigualdade inverte-se, e quando se multiplica ou divide por um mesmo número positivo ambos os membros de uma desigualdade, o sentido da desigualdade mantém-se.

Exercício 1, da pág. 100 adaptado do manual pi9

- Com este exercício pretende-se que os alunos sejam capazes de desenvolver a sua compreensão sobre os valores aproximados (por excesso e por defeito). Esta tarefa possibilita ainda uma conexão com a comparação e ordenação de números, uma vez que se pretende que os alunos sejam capazes de identificar a melhor e a pior aproximação ao valor de π.

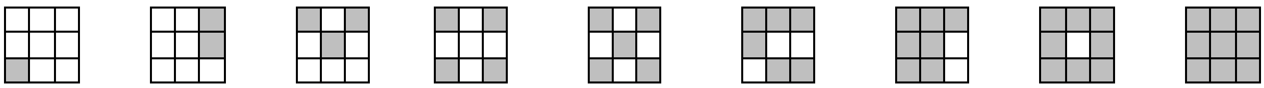
- Não se prevê dificuldades acrescidas na resolução desta tarefa.

Anexo 3 – Enunciados das tarefas realizadas em aula

Dia 19 de Fevereiro – Ficha de trabalho sobre Números Racionais [2]

1 – Sequência de Figuras

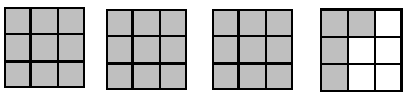
1.1 Observa a seguinte sequência de figuras:



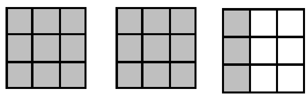
Para cada figura escreve, na forma de fração e na forma de dízima, o número que representa a parte sombreada, considerando que cada figura está dividida em partes iguais.

1.2 A seguir estão representados dois grupos de sequências de figuras. Considerando que cada figura está dividida em partes iguais, escreve, na forma de fração e na forma de dízima, o número que representa a parte sombreada de cada grupo.

Grupo A



Grupo B



1.3 Escreve a dízima correspondente a cada uma das seguintes frações:

$\frac{10}{99}$ $\frac{10}{999}$ $\frac{105}{999}$ $\frac{1007}{9999}$

1.4 Escreve na forma de fração as seguintes dízimas:

0,45454545... 0,654654654… 0,107810781078…

0,44444444… 0,329032903290… 0,(135924680)

1.5 Escreve uma regra que permita representar qualquer dízima infinita periódica na forma de fração.

[2] Fonte: Tarefa adaptada do Ministério de Educação/DGIDC (2011, p.9). Números reais e inequações: proposta de sequência de tarefas para o 9.º ano.

Dia 20 de Fevereiro – Ficha de trabalho sobre Números Reais[3]

NÚMEROS RACIONAIS – São números que podem ser escritos na forma de razão entre dois números inteiros. Podem ser representados por **dízimas finitas** ou **infinitas periódicas.**

NÚMEROS IRRACIONAIS – São números cuja dízima é **infinita não periódica**. Não pode ser representado sobre a forma de fração.

1– Descoberta de um novo conjunto

Considera os seguintes números:

$\sqrt{4900}$ $\sqrt{490}$ $\sqrt{49}$ $\sqrt{4,9}$ $\sqrt{0,49}$

1.1. Quais dos números indicados são racionais e quais podem ser irracionais.

1.2. Dá exemplos de números racionais cujas raízes quadradas sejam também um número racional.

2 – Resolve os exercícios 8, 5 e 4, da página 97, do manual pi9.

Página 97, do manual pi9

8 Supondo que se mantém a regularidade na parte decimal de cada um dos números, classifica-os como racionais ou irracionais.

8.1. 0,232 323 23... **8.2.** 7,123 456 789 101 112 131 415...

8.3. 13, 141 441 444 144 44... **8.4.** 34,576 857 685 768...

5 Considera o conjunto $A = \left\{-1,27; -\frac{3}{7}; \pi; \sqrt{16}\right\}$. Qual dos números do conjunto A corresponde:

5.1. a uma dízima infinita periódica?

5.2. a um número irracional?

4 Completa corretamente os espaços em branco, utilizando os símbolos $\in$ ou $\notin$.

4.1. 4 ___ $\mathbb{Z}$ **4.2.** -7 ___ $\mathbb{R}$ **4.3.** -12 ___ $\mathbb{N}$

4.4. $\sqrt{4}$ ___ $\mathbb{Z}$ **4.5.** $-\sqrt{11}$ ___ $\mathbb{Q}$ **4.6.** $\pi + 1$ ___ $\mathbb{Z}$

4.7. $-\sqrt{12}$ ___ $\mathbb{R}^+$ **4.8.** 0 ___ $\mathbb{R}$ **4.9.** $-15,(34)$ ___ $\mathbb{R}$

4.10. $3,(62)$ ___ $\mathbb{Z}$ **4.11.** $\sqrt{25}$ ___ $\mathbb{Z}$ **4.12.** $\sqrt{0,04}$ ___ $\mathbb{Q}$

[3] Fonte: Tarefa adaptada do Ministério de Educação/DGIDC (2011, p.8). Números reais e inequações: proposta de sequência de tarefas para o 9.º ano.

Dia 20 de Fevereiro – Trabalho para casa[4]

1- Dízima

$\frac{368}{491}$ pode ser representado da seguinte maneira:

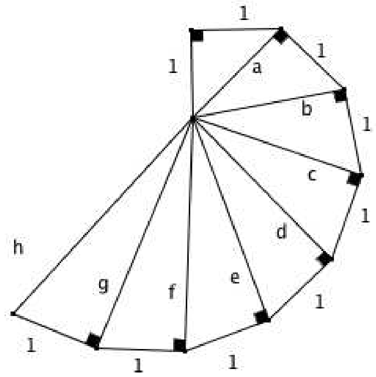
$$\frac{368}{491} = \begin{aligned}[t]
&0.749\ 490\ 835\ 030\ 549\ 898\ 167\ 006\ 109\ 979\ 633\ 401\ 221\ 995\ 926\ 680\ 244\ 399\ 185\ 336\ 048\ 879\ 837\\
&067\ 209\ 775\ 967\ 413\ 441\ 955\ 193\ 482\ 688\ 391\ 038\ 696\ 537\ 678\ 207\ 739\ 307\ 535\ 641\ 547\ 861\ 507\ 128\\
&309\ 572\ 301\ 425\ 661\ 914\ 460\ 285\ 132\ 382\ 892\ 057\ 026\ 476\ 578\ 411\ 405\ 295\ 315\ 682\ 281\ 059\ 063\ 136\\
&456\ 211\ 812\ 627\ 291\ 242\ 362\ 525\ 458\ 248\ 472\ 505\ 091\ 649\ 694\ 501\ 018\ 329\ 938\ 900\ 203\ 665\ 987\ 780\\
&040\ 733\ 197\ 556\ 008\ 146\ 639\ 511\ 201\ 629\ 327\ 902\ 240\ 325\ 865\ 580\ 448\ 065\ 173\ 116\ 089\ 613\ 034\ 623\\
&217\ 922\ 606\ 924\ 643\ 584\ 521\ 384\ 928\ 716\ 904\ 276\ 985\ 743\ 380\ 855\ 397\ 148\ 676\ 171\ 079\ 429\ 735\ 234\\
&215\ 885\ 947\ 046\ 843\ 177\ 189\ 409\ 368\ 635\ 437\ 881\ 873\ 727\ 087\ 576\ 374\ 745\ 417\ 515\ 274\ 949\ 083\ 503\\
&054\ 989\ 816\ 700\ 610\ 997\ 963\ 340\ 122\ 199\ 592\ 668\ 024\ 439\ 918\ 533\ 604\ 887\ 983\ 706\ 720\ 977\ 596\ 741\\
&344\ 195\ 519\ 348\ 268\ 839\ 103\ 869\ 653\ 767\ 820\ 773\ 930\ 753\ 564\ 154\ 786\ 150\ 712\ 830\ 957\ 230\ 142\ 566\\
&191\ 446\ 028\ 513\ 238\ 289\ 205\ 702\ 647\ 657\ 841\ 140\ 529\ 531\ 568\ 228\ 105\ 906\ 313\ 645\ 621\ 181\ 262\ 729\\
&124\ 236\ 252\ 545\ 824\ 847\ 250\ 509\ 164\ 969\ 450\ 101\ 832\ 993\ 890\ 020\ 366\ 598\ 778\ 004\ 073\ 319\ 755\ 600\\
&814\ 663\ 951\ 120\ 162\ 932\ 790\ 224\ 032\ 586\ 558\ 044\ 806\ 517\ 311\ 608\ 961\ 303\ 462\ 321\ 792\ 260\ 692\ 464\\
&358\ 452\ 138\ 492\ 871\ 690\ 427\ 698\ 574\ 338\ 085\ 539\ 714\ 867\ 617\ 107\ 942\ 973\ 523\ 421\ 588\ 594\ 704\ 684\\
&317\ 718\ 940\ 936\ 863\ 543\ 788\ 187\ 372\ 708\ 757\ 637\ 474\ 541\ 751\ 527\ 494\ 908\ 350\ 305\ 498\ 981\ \ldots
\end{aligned}$$

$\frac{368}{491}$ é um número racional ou irracional? Justifica a tua afirmação.

Caso exista, sublinha o período da sua dízima.

[4] Fonte: Tarefa adaptada do Ministério de Educação/DGIDC (2011, p.9). Números reais e inequações: proposta de sequência de tarefas para o 9.º ano.

Dias 25 e 26 de Fevereiro de 2013 – Ficha de trabalho sobre a Reta Real [5]

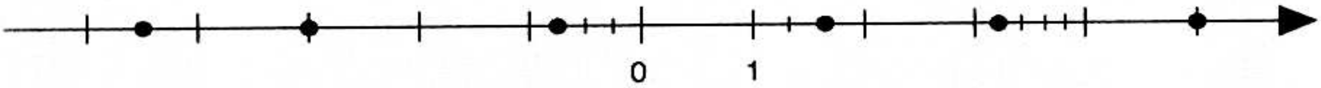


1.ª Tarefa – Espiral

Observa a figura em espiral. Indica a medida de cada um dos segmentos da figura e identifica aqueles cuja medida é um número irracional.

2.ª Tarefa – Reta real

Na figura que se segue, está desenhada uma reta numérica.



2.1. Identifica na forma de dízima e de fração a abcissa dos pontos assinalados na reta.

2.2 Assinala na reta (representada na página seguinte) os valores dos pontos de abcissas:

$\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{25}{50}, \sqrt{16}, -\sqrt{\frac{1}{16}}, -1-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}, \sqrt{5}$. Ordena os números que representaste.

3.ª Tarefa – Comparação de Números Reais

Completa com os símbolos > e < ou = de modo a obter afirmações verdadeiras.

$\sqrt{2}$ ……1,4142	-1,33……-1,4	π …… $\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$......$-\frac{1}{4}$
$-\frac{45}{90}$ ……$-0{,}45$	0,519……0,53	$-\pi$ ……$-\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$......$\frac{1}{4}$

4. ª Tarefa – Desigualdades

4.1 Considera a desigualdade $a < b$, em que $a, b \in R$. Averigua o que acontece ao sentido da desigualdade quando:

a) Adicionas a ambos os membros da desigualdade um número positivo.

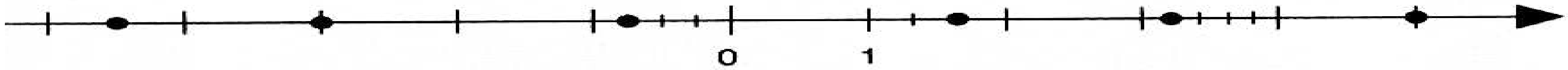
b) Adicionas a ambos os membros da desigualdade um número negativo.

c) Multiplicas ambos os membros da desigualdade por um número positivo.

d) Multiplicas ambos os membros da desigualdade por um número negativo.

4.2 Se $a < \sqrt{2}$ e $\sqrt{2} < 3$. Qual é a relação de ordem (>, < ou =) entre o valor de a e 3? Justifica a tua resposta.

[5] Tarefas adaptadas do Ministério de Educação/DGIDC (2011, p. 11 e 20, 2011). Números reais e inequações: proposta de sequência de tarefas para o 9.º ano.


0
1

Tarefa realizada no dia 5 de Março – Ex. 1 (adaptado) da pág. 108 do manual

1 Representa **geometricamente** e **em compreensão** cada um dos seguintes intervalos de números reais

Exercício 1, pág. 108 do manual pi 9, vol. 2		
Intervalo	Geométrica	Em compreensão
1.1. $[2, 4]$		
1.2. $[-2, 5[$		
1.5. $]-\infty, +5]$		
1.6. $]3, +\infty[$		

Tarefas realizadas no dia 6 de Março – Ex. 1 e 11 das páginas 112 e 113, do manual

1 Escreve na forma de um intervalo de números reais e representa geometricamente cada um dos conjuntos seguintes.

1.1. $[2, 4] \cap]1, 3[$

1.2. $[2, 4] \cup]1, 3[$

1.3. $[1, 3] \cup]3, 10[$

1.4. $]-\infty, 5] \cap]1, 4[$

1.5. $]-\infty, 8] \cup]1, 40[$

1.6. $\mathbb{R} \cup [2, 5[$

11 Seja $A = [-\pi, \pi]$ e $B = \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right[$.

11.1. Caso exista, indica um número irracional que:

a) pertença a $A \cup B$, mas que não pertença a B;

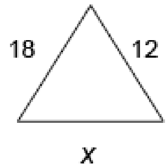
b) pertença a B, mas que não pertença a A.

11.2. Existe algum número que pertença a $A \cap B$ e que não pertença a A? Justifica.

Tarefas realizadas no dia 11 de Março

Perímetro do Triângulo[6]

1 – Apresenta na forma de intervalo de números reais os valores de x para os quais o perímetro do triângulo é inferior a 40cm (medidas na figura em cm).



Página 100 e 101, do manual

2 Sabendo que $k < 13$, o que podes concluir sobre:

2.2. $2k$? **2.3.** $-3k$?

Explica a tua resposta.

Tarefa "π"

1 Ao longo dos tempos foram utilizadas diferentes aproximações para o valor de π (pi). Na tabela estão indicados alguns desses valores.

Egípcios	Gregos	Hindus	Romanos
$\frac{256}{81}$	$\frac{22}{7}$	$\sqrt{10}$	$3+\frac{1}{8}$

b) Ordena (por ordem crescente) os cinco números apresentados e explica como procedeste.

$$\frac{256}{81}, \frac{22}{7}, \sqrt{10}, 3+\frac{1}{8}, \pi.$$

c) Que povo utilizava a pior aproximação?

d) Identifica as aproximações por excesso e as aproximações por defeito, do valor de π.

[6] Fonte: Tarefa adaptada do Ministério de Educação/DGIDC (2011, p.22). Números reais e inequações: proposta de sequência de tarefas para o 9.º ano.

Anexo 4 – Quadro síntese da análise de algumas questões do teste do dia 4 de Março

6. Escreve na forma de uma fração, em que o numerador e o denominador sejam números inteiros, um número x, que verifique a condição seguinte $-3,2 < x < \pi$.

9. Na página seguinte, desenha uma reta real cuja unidade seja 4 cm. Nela marca rigorosamente os pontos $1+\sqrt{3}$ e $-2-\frac{1}{3}$.

Quadro V – Análise de questões dos números reais do teste do dia 4/03/13

	Total no teste (%)	Resposta à Questão 6	Resposta à questão 9	Pontuação obtida nas questões	
				6 (5val.)	**9 (10val.)**
Mário	94	$-\frac{315}{100}=-3,15$	**Representou corretamente ambos os números**	**5**	**10**
Rodrigo	66	$-\frac{74}{25}=-2,96$	O aluno marcou $1+\sqrt{2}$ em vez de marcar $1+\sqrt{3}$. E marcou $-2-\frac{1}{4}$ dividindo a unidade em quatro partes em vez de dividir em 3 para obter $-2-\frac{1}{3}$.	0	5
Bárbara	15	$-\frac{2}{10}=-0,2$	A aluna marcou $-2-\frac{1}{3}$ no semi-eixo positivo da reta real e em vez de dividir a unidade em 3 partes, dividiu-a em 8 partes, evidenciando dificuldades.	0	1
Hugo	22	$-\frac{30}{9}=-3,333...$	-	0	0
Clara	83	$-\frac{3135}{999}=-3,(138)$	**Representou corretamente ambos os números**	0	**10**
David	21	-	-	0	0
Fernando	47	$-\frac{12}{3,78}=-3,17$	Conseguiu representar corretamente na reta real $-2-\frac{1}{3}$ mas não conseguiu representar $\sqrt{3}$ evidenciando dificuldades. Representou um triângulo retângulo cujas medidas dos catetos mediam 2 e 1 respetivamente para determinar a hipotenusa $\sqrt{3}$.	4	5
Gilberto	92	$-\frac{318}{100}=-3,18$	**Representou corretamente ambos os números**	**5**	**10**
Íris	59	-	**Representou corretamente ambos os números**	0	**10**
José	8	-	-	0	0

Júlia	41	$-\frac{17}{15}=-1{,}1(3)$	**Representou corretamente ambos os números**	0	**10**
Custódio	66	$-\frac{28{,}62}{9}=-3{,}18$	Conseguiu representar corretamente na reta real $-2-\frac{1}{3}$ mas não conseguiu representar $\sqrt{3}$ evidenciando dificuldades. Representou um triângulo retângulo cujas medidas dos catetos mediam 2 e 1 respetivamente para determinar a hipotenusa $\sqrt{3}$.	4	5
Gaspar	97	$-\frac{316}{100}=-3{,}16$	**Representou corretamente ambos os números**	**5**	**10**
Mariana	35	$-\frac{32-\pi}{10}=-3{,}51$	Conseguiu representar corretamente na reta real $-2-\frac{1}{3}$. Conseguiu representar $\sqrt{2}$ mas não representou $\sqrt{3}$	0	4
Paula	59	-3,16 (não coloca na forma de fração)	**Representou corretamente ambos os números**	2	**10**
Rui	88	$-\frac{318}{100}=-3{,}18$	**Representou corretamente ambos os números**	**5**	**10**
Sónia	9	-	Conseguiu representar corretamente na reta real $-2-\frac{1}{3}$ mas não conseguiu representar $\sqrt{3}$ evidenciando dificuldades	0	4

Legenda:

Alunos analisados em aula

Análise das respostas às questões dos números reais dos testes de 4/03 e 13/05:

Teste do dia 4 de Março (17 alunos)	**Totalmente Certa**	**Incompleta**	**Errada**	**Branco**
Resposta à questão 6	4	3	6	4
Resposta à questão 9	8	6	0	3

Teste do dia 13 de Maio (16 alunos)	**Totalmente Certa**	**Incompleta**	**Errada**	**Branco**
Resposta à questão 5	4	1	6	5
Resposta à questão 5	6	3	1	6
Resposta à questão 8	3	6	0	7

Anexo 5 – Quadro síntese da análise de algumas questões do teste do dia 13 de Maio

5. Indica três números irracionais que pertençam ao conjunto $\{x \in R: -2 < x < 1\}$.

6. Escreve todos os números pertencentes ao conjunto $Z \cap \left]-2, \sqrt{5}\right]$.

8. Resolve a inequação $\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{6}\right) \geq 4x+\frac{1}{6}$, representando o conjunto-solução geometricamente e sob a forma de intervalo de números reais.

Quadro VI – Análise de questões dos números reais do teste do dia 13/05/13

	Total no teste (%)	**Resposta à Questão 5 (4val.)**	**Resposta à questão 6 (4val.)**	**Resposta à questão 8 (5val.)**
Mário	81	(3) $-\sqrt{2}, -\pi+2, \pi-2$	**(4)** {-1,0,1,2}	**(5)** C.S.= $\left]-\infty,-\frac{5}{30}\right]$
Rodrigo	62	(0) $\frac{1}{2},-\frac{2}{3},-\frac{5}{6}$	(3) {-1,1,2}	(4) $-\frac{1}{6} \geq x$
Bárbara	10	-	-	-
Hugo	20	(0) $-1{,}5;0;-1{,}7.$	-	-
Clara	81	**(4)** $\sqrt{0{,}23}, \sqrt{0{,}97}, \sqrt{0{,}99}$	**(4)** {-1,0,1,2}	(4) $-\frac{5}{30} \geq x$
David	9	-	-	-
Fernando	11	(0) $-\frac{1}{3},-\frac{1{,}5}{2},-\frac{1{,}2}{1{,}4}$	-	-
Gilberto	86	**(4)** $-\sqrt{2}, -\sqrt{3}, -\sqrt{2}+0{,}5$	**(4)** {-1,0,1,2}	**(5)** C.S.= $\left]-\infty,-\frac{1}{6}\right]$
Íris	59	(0) $\frac{1}{3},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}$	(0) $-\sqrt{2},-\sqrt{1},\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4}$	(2) Resolução incompleta da inequação
José	Faltou	- (F)	- (F)	- (F)
Júlia	32	(0) $0{,}2;-2{,}5;-8{,}9$	(1) Representou na reta os números inteiros	(4) Erros nas contas. C.S.= $\left]-\infty,-\frac{22}{3}\right]$
Custódio	54	(0) $-1{,}5;0;-0{,}5$	**(4)** {-1,0,1,2}	-
Gaspar	68	**(4)** $-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{0{,}5}$	**(4)** {-1,0,1,2}	**(5)** C.S.= $\left]-\infty,-\frac{1}{6}\right]$
Mariana	45	-	(2) {-2, -1,0,1,2, $\sqrt{5}$ }	-
Paula	45	-	-	(3) Erro em desembaraçar de denominadores na inequação.
Rui	75	**(4)** $-\sqrt{2}, -\sqrt{3}, \sqrt{0{,}5}$	**(4)** {-1,0,1,2}	(4) Representa geometricamente, mas não na forma de intervalo.
Sónia	5	-	-	-

Legenda:

Alunos analisados em aula

Anexo 6 – Pedidos de autorização

À Direção da Escola

Exma. Sra.

Diretora da Escola [redacted]

Informo que no âmbito do projecto de investigação sobre o tópico matemático dos "Números reais", do Mestrado de Ensino de Matemática, do Instituto de Educação, da Universidade de Lisboa, no presente ano lectivo 2012/2013 encontro-me a desenvolver um estudo sobre a minha prática letiva. Para o efeito, durante as aulas que irei lecionar no final do 2.º período, sobre a orientação da Professora [redacted], serão recolhidos dados no contexto de sala de aula na turma do 9.º 2.

Para a realização deste trabalho serão objecto de análise alguns dos materiais produzidos pelos alunos (no caderno, no quadro, realizados em casa ou na aula) e a recolha de dados envolverá também a gravação em áudio nas aulas por mim lecionadas. Em todo o processo são garantidos os direitos de privacidade o anonimato dos alunos. E em qualquer prestação de prova pública os nomes utilizados serão fictícios.

Os encarregados de educação serão informados sobre o estudo, sendo essencial o seu consentimento para possibilitar a participação dos alunos.

Com os melhores cumprimentos,

A Professora Estagiária,

____

(Sara Pinto Barbosa)

Com o conhecimento da Professora,

____

[redacted]

Aos Encarregados de Educação

Exmo. Sr. Encarregado de Educação,

Informo que no âmbito do projecto de investigação sobre o tópico matemático dos "Números reais", do Mestrado de Ensino de Matemática, do Instituto de Educação, da Universidade de Lisboa, no presente ano lectivo 2012/2013 encontro-me a desenvolver um estudo sobre a minha prática letiva. Para o efeito, durante as aulas que irei lecionar no final do 2.º período, sobre a orientação da Professora [redacted], serão recolhidos dados no contexto de sala de aula na turma do 9.º 2, serão recolhidos dados no contexto de sala de aula na turma do(a) seu (sua) educando(a)

Para a realização deste trabalho serão objecto de análise alguns dos materiais produzidos pelos alunos (no caderno, no quadro, realizados em casa ou na aula) e a recolha de dados envolverá também a gravação em áudio nas aulas por mim lecionadas. Em todo o processo são garantidos os direitos de privacidade e o anonimato do seu educando. E em qualquer prestação de prova pública os nomes utilizados serão fictícios.

A participação neste trabalho apenas terá benefícios para a aprendizagem do(a) seu (sua) educando(a), não havendo qualquer inconveniente para o próprio.

Para o efeito, solicito a sua autorização para proceder às gravações, manifestando inteira disponibilidade para prestar qualquer esclarecimento que considere necessário.

Agradeço a sua atenção,

A Professora Estagiária,	Com o conhecimento da Professora,
______________________	______________________
(Sara Pinto Barbosa)	[redacted]

Autorização

- -

Autorizo que o(a) meu educando(a) __________________________ Nº __ do 9.º 2, a participar nas gravações áudio necessárias para a realização do trabalho de investigação acima referido.

____

(Assinatura do Encarregado de Educação)